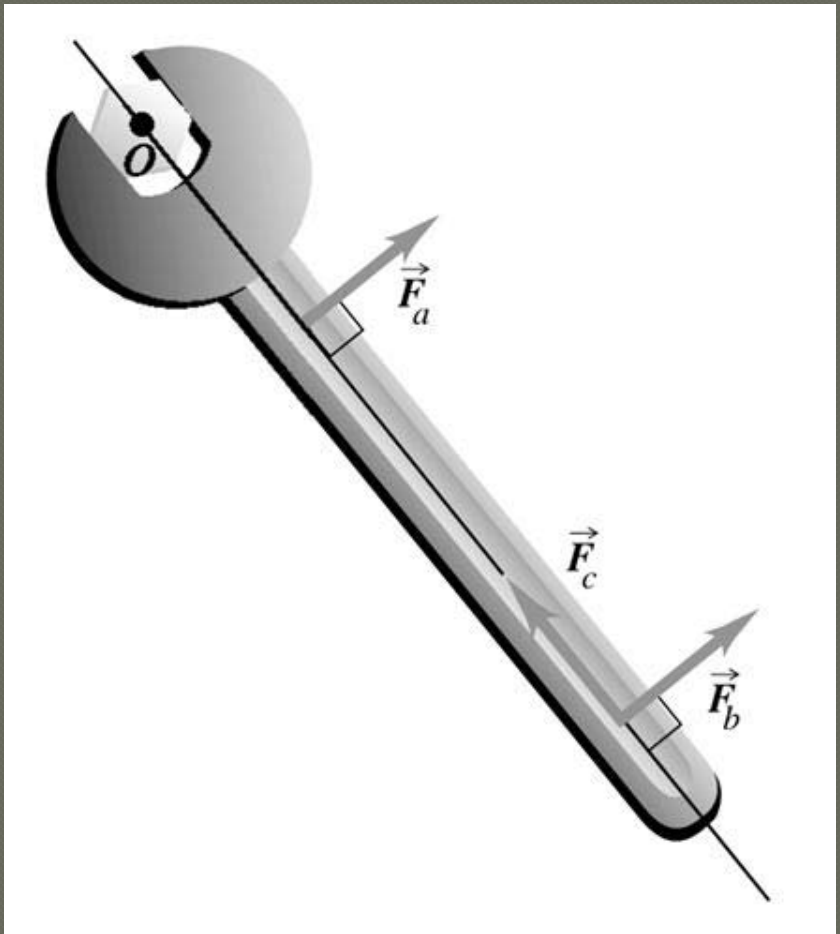
Física 1

10 – Dinâmica do Movimento de Rotação

Torque

Noção intuitiva



Qual das três forças indicadas é mais eficiente para afrouxar a porca presa firmemente?.

Resposta: $\mathbf{F}_b$

©2004 by Pearson Education

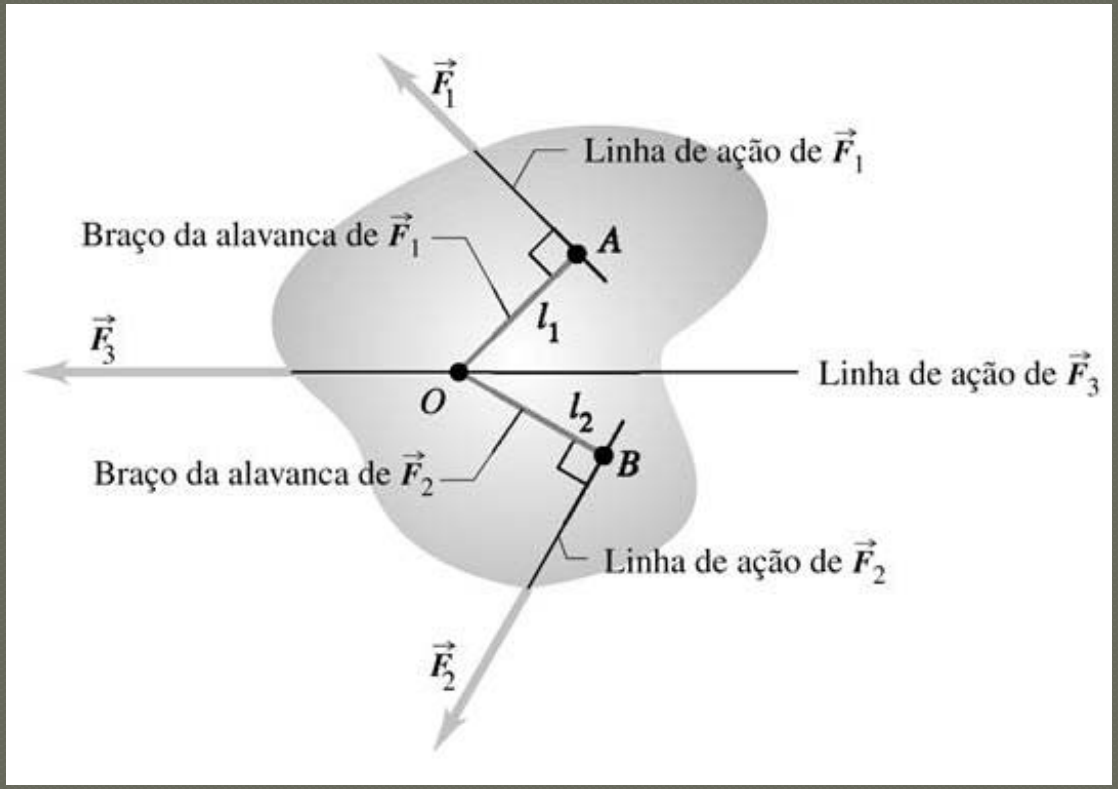
Torque

Noção intuitiva

A aplicação da força na extremidade da barra torna mais fácil a tarefa de girar o parafuso.

Torque

Módulo do torque



O torque ou momento de uma força em relação a um ponto é o produto do módulo da força pelo braço da alavanca.

$$\tau_1 = +F_1 l_1$$

$$\tau_2 = -F_2 l_2$$

Torque positivo: Produz rotação no sentido anti-horário

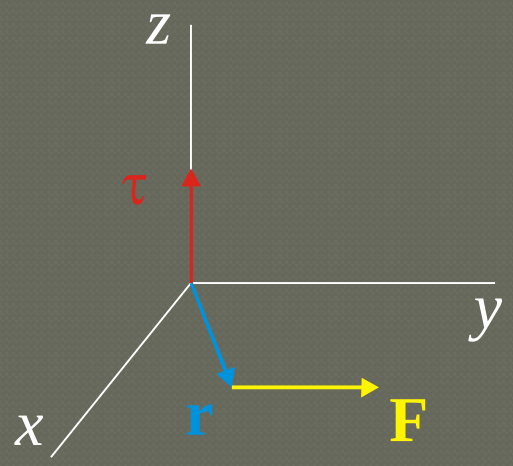
Torque negativo: Produz rotação no sentido horário

©2004 by Pearson Education

Torque

Definição

Se uma força **F** é aplicada num ponto definido pelo vetor posição **r** em relação à origem de um referencial *xyz*, então o torque τ da força em relação à origem do referencial é dado por:

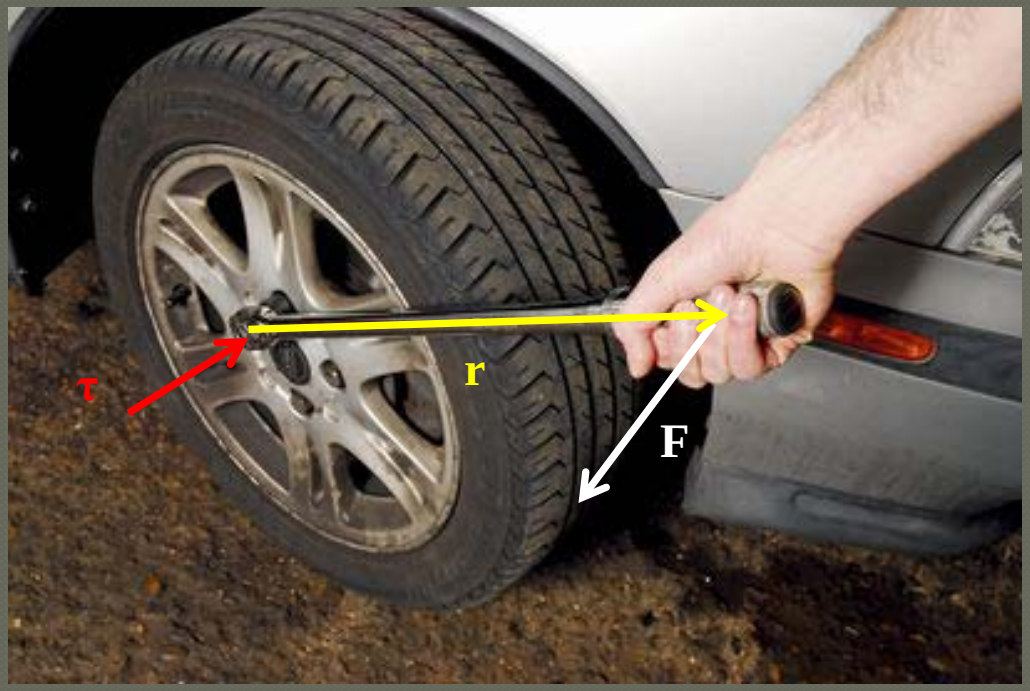


$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Unidade SI: N.m

Torque

Noção intuitiva



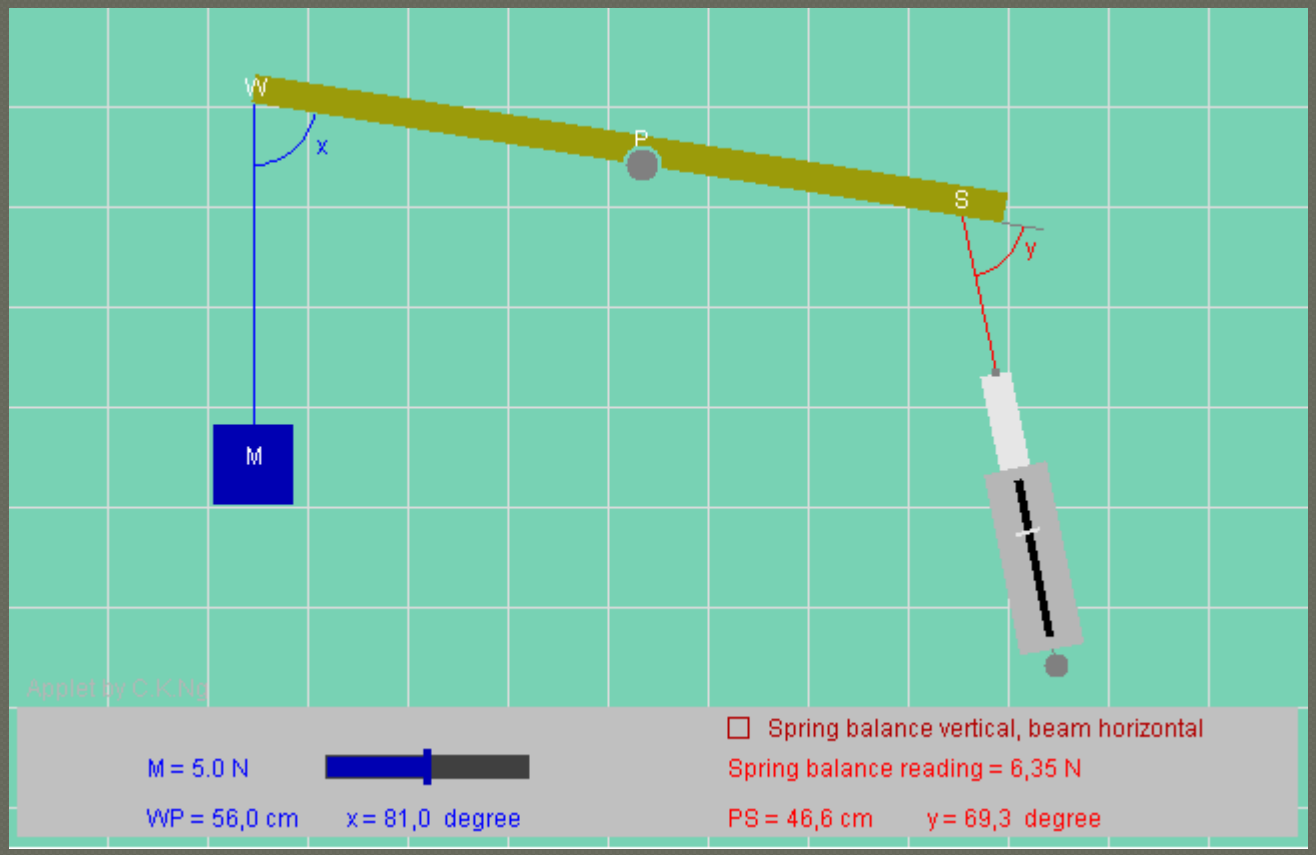
Torquímetro

O torquímetro é um aparelho utilizado para medir a intensidade de um torque aplicado.

Torquímetro analógico

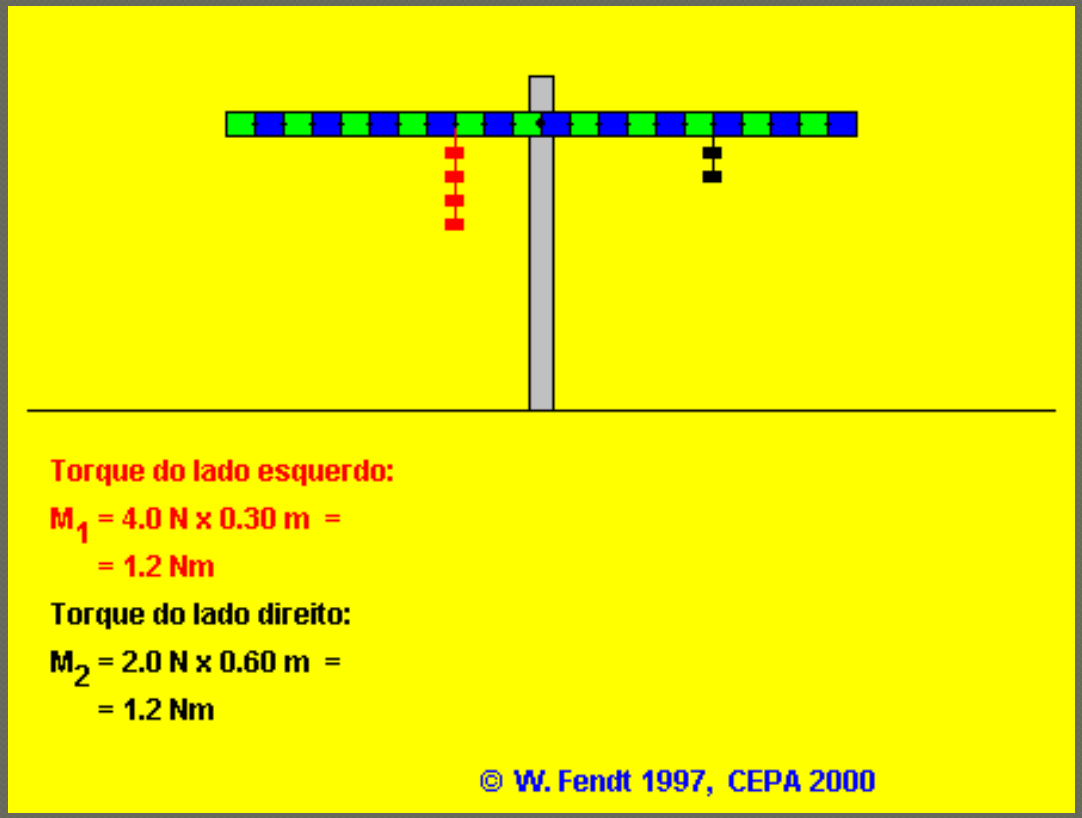
Torquímetro digital

Torque e equilíbrio



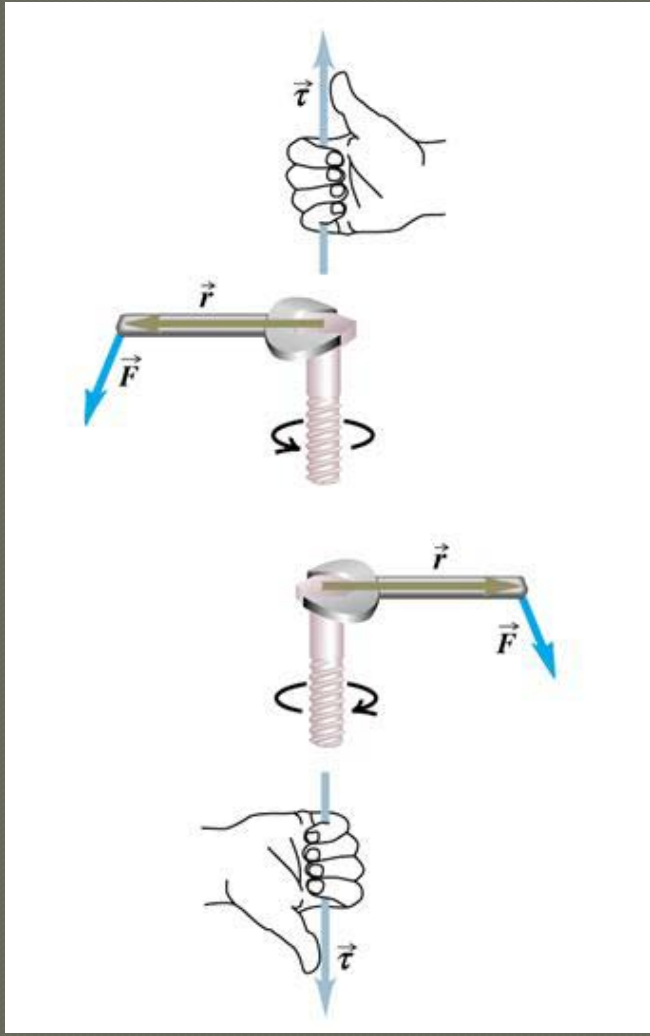
© 2007, Chiu-king Ng

Torque e equilíbrio



© Walter Fendt, 1997, CEPA 2000

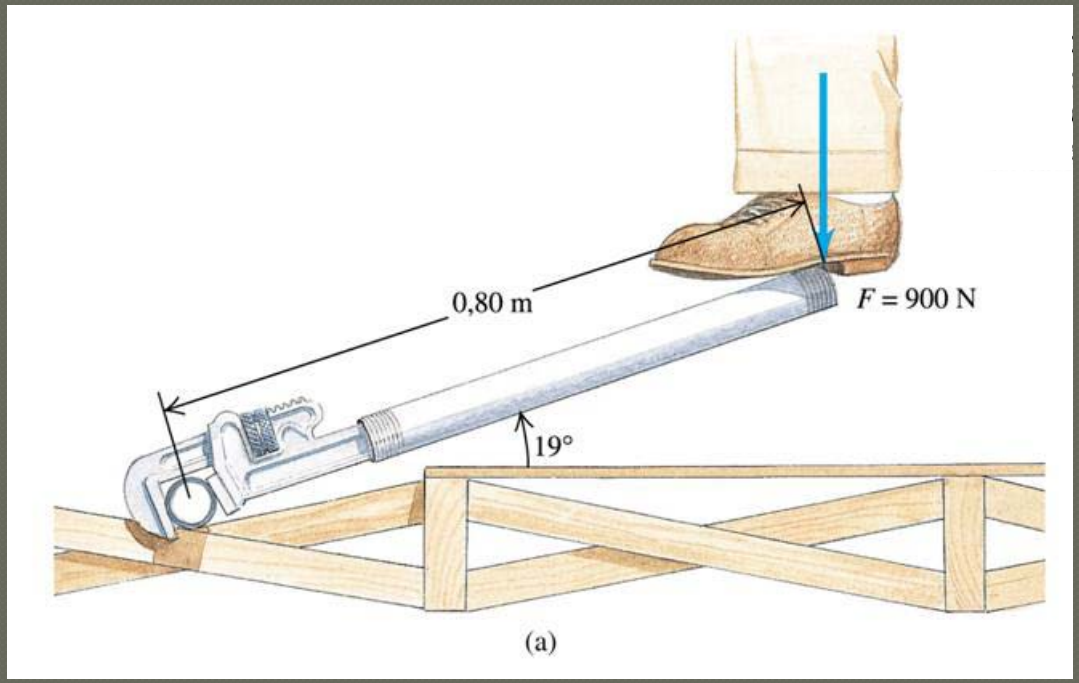
Orientação do vetor torque



O torque $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ está dirigido ao longo do eixo do parafuso. Quando os dedos da mão direita estão encurvados no sentido de uma rotação de **r** para **F** – isto é, no sentido da rotação que o torque tende a produzir – o dedo polegar direito indica o sentido de τ (ortogonal ao vetor **r** e ao vetor **F**).

©2004 by Pearson Education

Exemplo prático



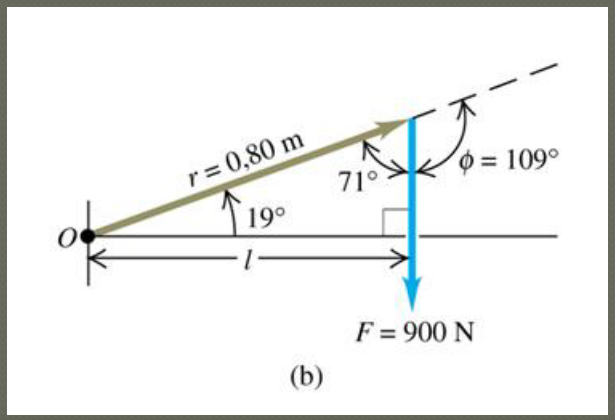
(a) Um bombeiro hidráulico tenta afrouxar a conexão de um tubo ficando em pé na extremidade de uma "alavanca".

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\tau = rF \operatorname{sen} \phi$$

$$\tau = (0{,}80\ \text{m})(900\ \text{N})\operatorname{sen}(109^\circ)$$

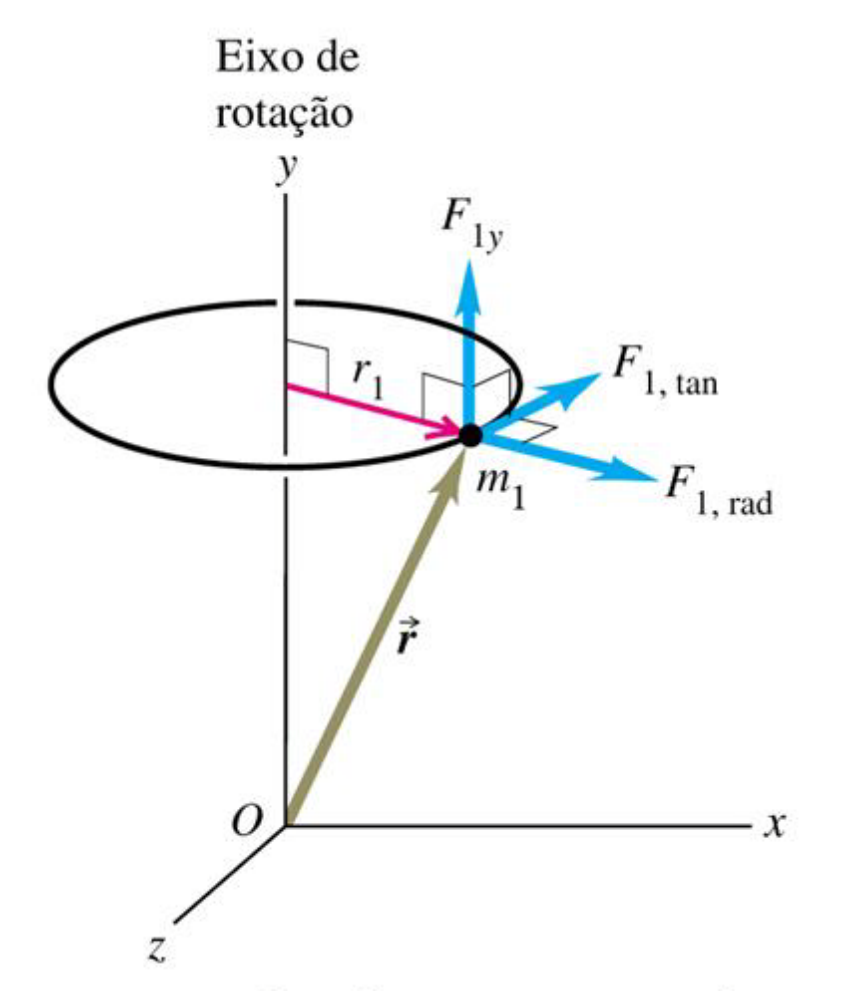
$$\tau \approx 680\ \text{N.m}$$



(b) Diagrama vetorial para achar o torque em torno de *O*.

©2004 by Pearson Education

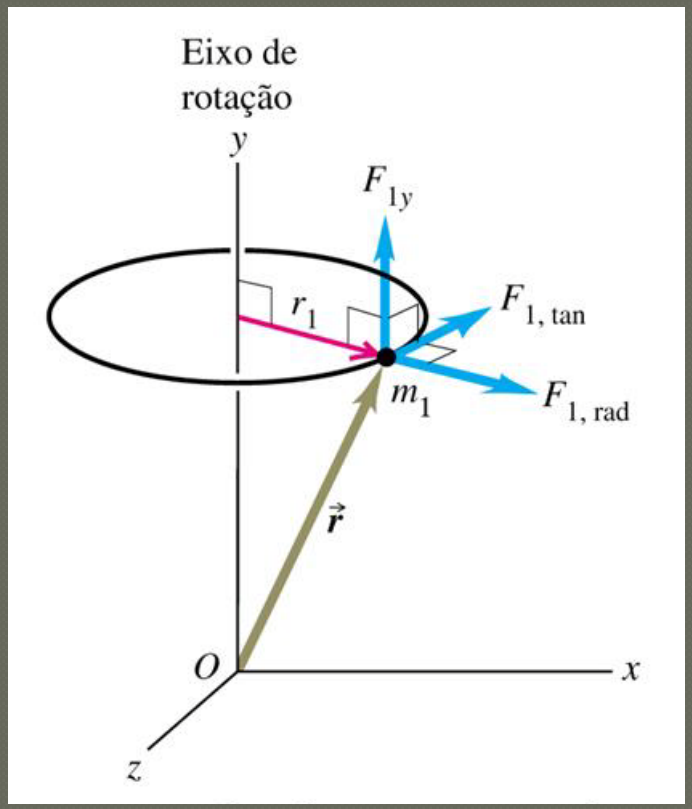
Torque e aceleração angular de um corpo rígido



Os três componentes da força resultante que atua sobre uma partícula do corpo rígido. Somente o componente $F_{1,\tan}$ contribui para o componente *y* do torque em torno do ponto *O*.

©2004 by Pearson Education

Torque e aceleração angular de um corpo rígido



Análise dinâmica da partícula 1:

$$F_{1,\tan} = m_1 a_{1,\tan}$$

$$F_{1,\tan} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha$$

$$\tau_1 = m_1 r_1^2 \alpha = I_1 \alpha$$

Análise dinâmica do corpo rígido:

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots = I_1\alpha + I_2\alpha + \cdots = m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + \cdots$$

$$\sum \tau_i = \left(\sum m_i r_i^2\right)\alpha$$

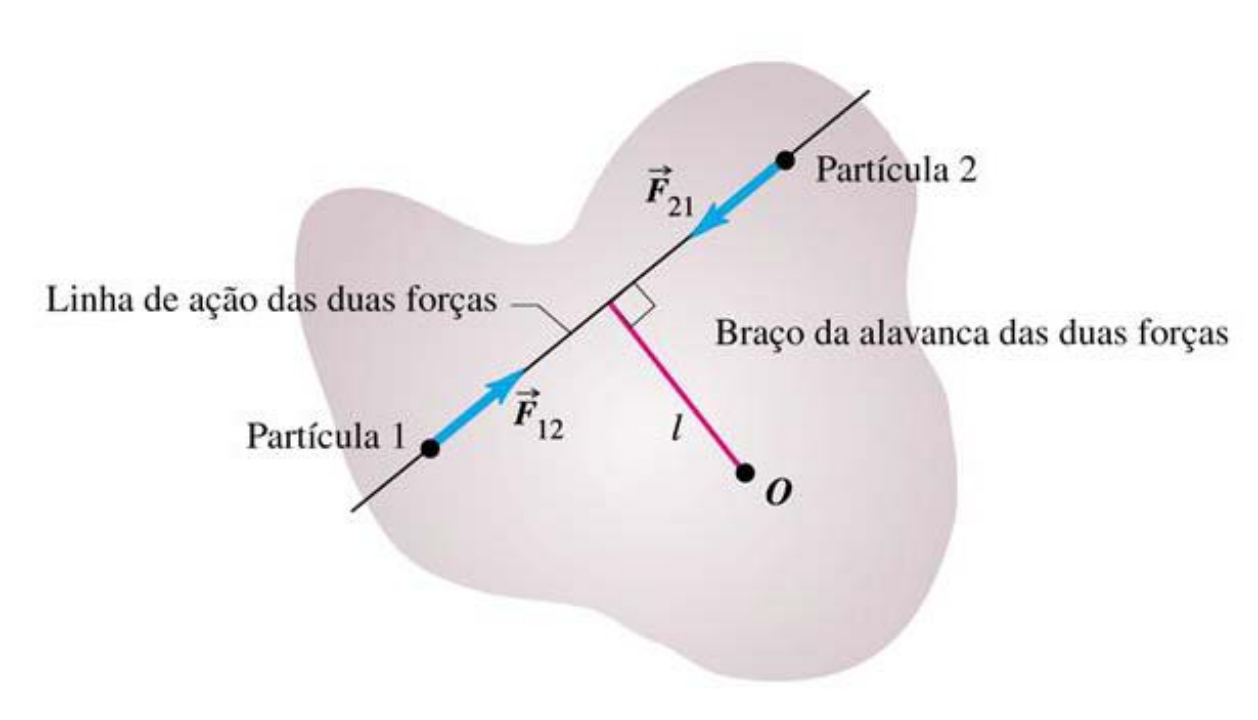
$$\boxed{\sum \tau = I\alpha}$$

Compare com o análogo translacional: $\sum F = Ma_{\text{cm}}$

©2004 by Pearson Education

Torque e aceleração angular de um corpo rígido

Torques internos



$$\sum \tau = I\alpha$$

A partícula 1 e a partícula 2 de um corpo rígido exercem entre si forças iguais e contrárias . Se essas forças atuam ao longo da linha que une as duas partículas, os braços das alavancas são iguais e os torques dessas forças são iguais e contrários. Somente torques de forças externas alteram o movimento de rotação de um corpo rígido.

©2004 by Pearson Education

Torque e equilíbrio

Equilibrista

Philippe Petit

$$\sum \boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

Quando o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação é pequeno, basta um pequeno torque para gerar uma dada aceleração angular.

Torque e equilíbrio

Philippe Petit, World Trade Center, 1974.

$$\sum \tau = I\alpha$$

Quando o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação é grande, é preciso um torque igualmente grande para gerar uma dada aceleração angular.

Torque e equilíbrio

"Equilibrista alemão percorre 20 metros sobre um dos cabos de aço do Pão de Açúcar"

O Globo (26/07/2007)

Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo móvel

Quando o eixo de rotação se move, dizemos que há movimento combinado de rotação e translação.

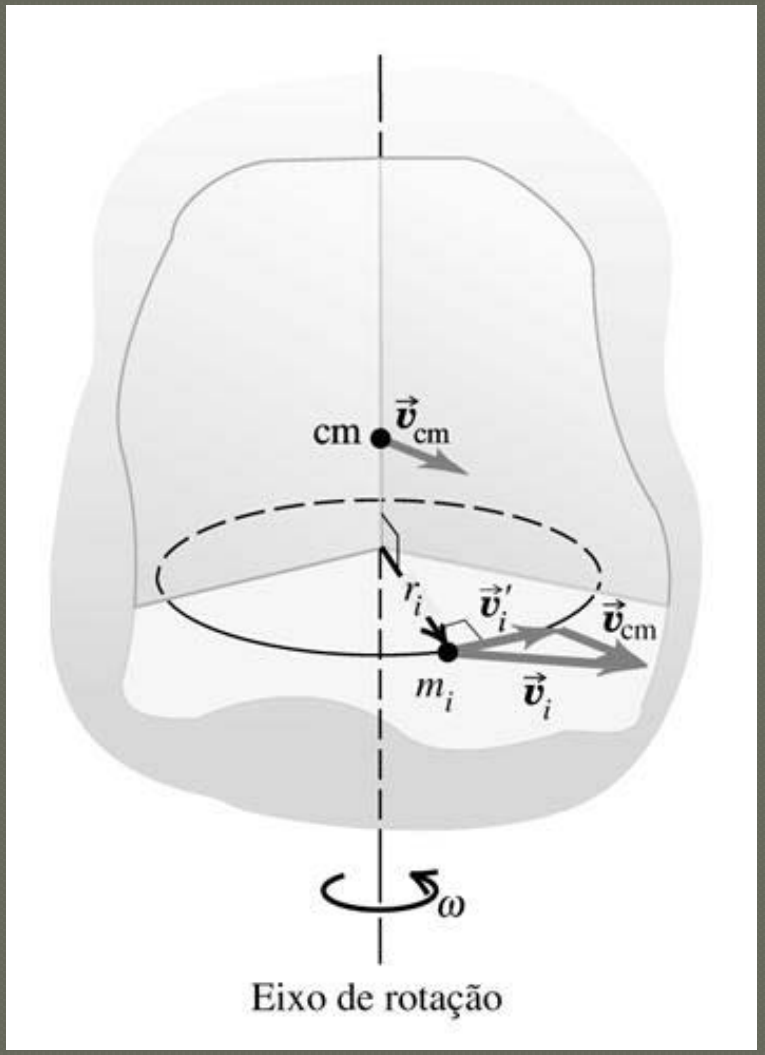
Translação do centro de massa

+

Rotação em torno de um eixo passando pelo centro de massa

Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo móvel

Relações envolvendo energia



Um corpo rígido com movimento combinado de translação e rotação.

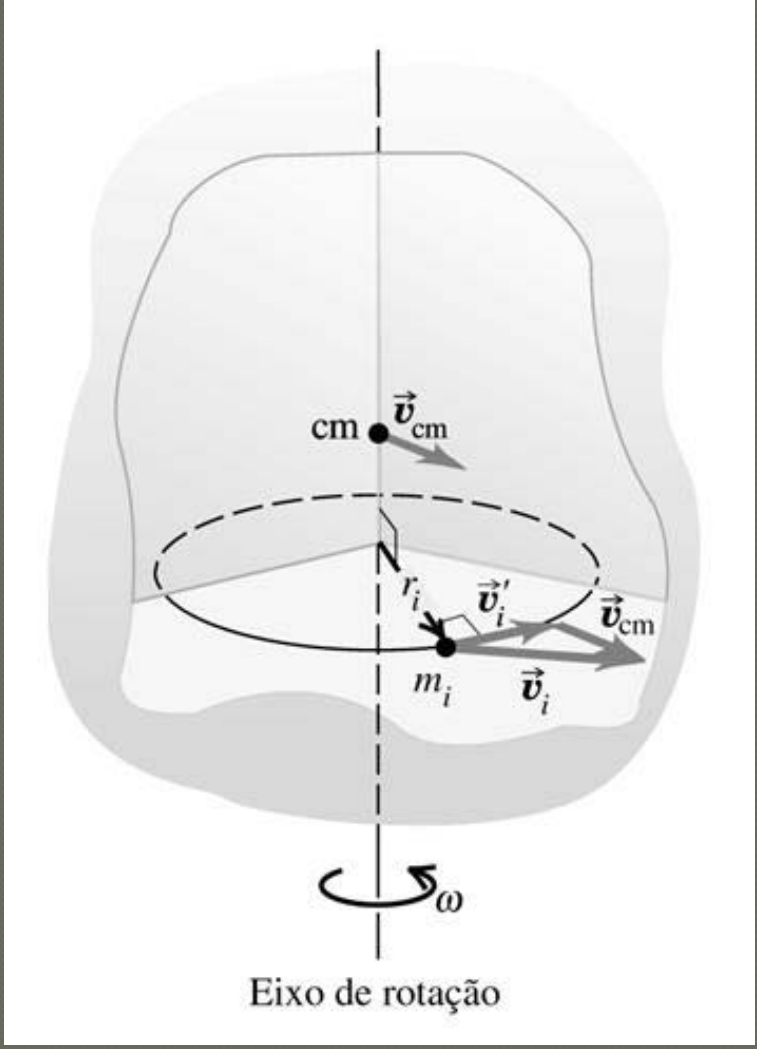
A velocidade $\mathbf{v}_i$ de uma partícula típica do corpo rígido é a soma da velocidade do centro de massa $\mathbf{v}_{cm}$ e da velocidade da partícula $\mathbf{v}_i'$ em relação ao centro de massa.

A velocidade angular do corpo rígido em torno do centro de massa é ω, de modo que $\mathbf{v}_i' = r_i \omega$.

©2004 by Pearson Education

Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo móvel

Relações envolvendo energia



Velocidade da *i*-ésima partícula do corpo:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i'$$

Energia cinética da *i*-ésima partícula:

$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \left(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right)$$

$$K_i = \frac{1}{2} m \left(\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i' \right) \cdot \left(\mathbf{v}_{cm} + \mathbf{v}_i' \right)$$

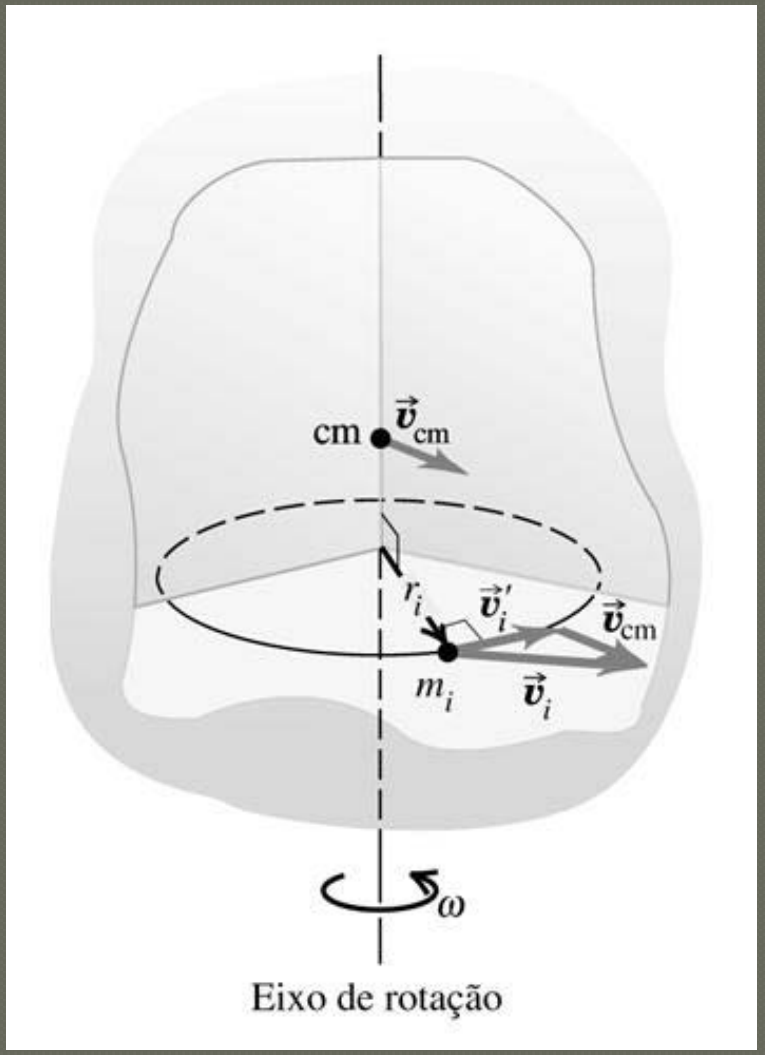
$$K_i = \frac{1}{2} m \left(\mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_{cm} + 2\mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_i' \cdot \mathbf{v}_i' \right)$$

$$K_i = \frac{1}{2} m \left(v_{cm}^2 + 2\mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_i' + v_i'^2 \right)$$

©2004 by Pearson Education

Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo móvel

Relações envolvendo energia



Energia cinética do corpo rígido:

$$K = \sum K_i$$

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum m_i \mathbf{v}_{cm} \cdot \mathbf{v}_i' + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

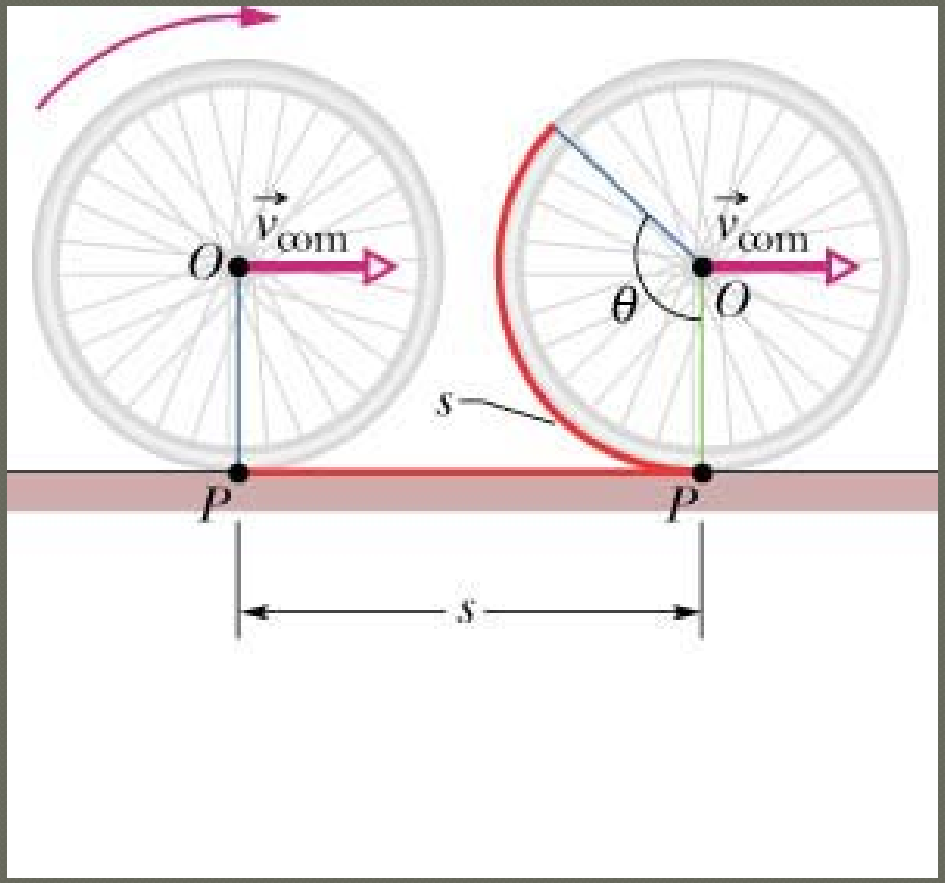
$$K = \frac{1}{2} v_{cm}^2 \sum m_i + \mathbf{v}_{cm} \cdot \sum m_i \mathbf{v}_i' + \frac{1}{2} \sum m_i v_i'^2$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}$$

©2004 by Pearson Education

Rolamento sem deslizamento

O que é?



No movimento de rolamento sem deslizamento, a distância percorrida pelo centro de massa é igual ao comprimento do arco correspondente ao deslocamento angular sofrido pelo corpo.

$$s = R\theta$$

$$v_{cm} = R\omega$$

$$a_{cm} = R\alpha$$

com → Center of mass

©2002 by John Wiley & Sons

Rolamento sem deslizamento

Definição

O movimento de rolamento sem deslizamento, ou simplesmente *rolamento*, é um movimento de rotação em torno de um eixo móvel que obedece às seguintes condições:

$$\Delta x_{\text{cm}} = R\theta$$

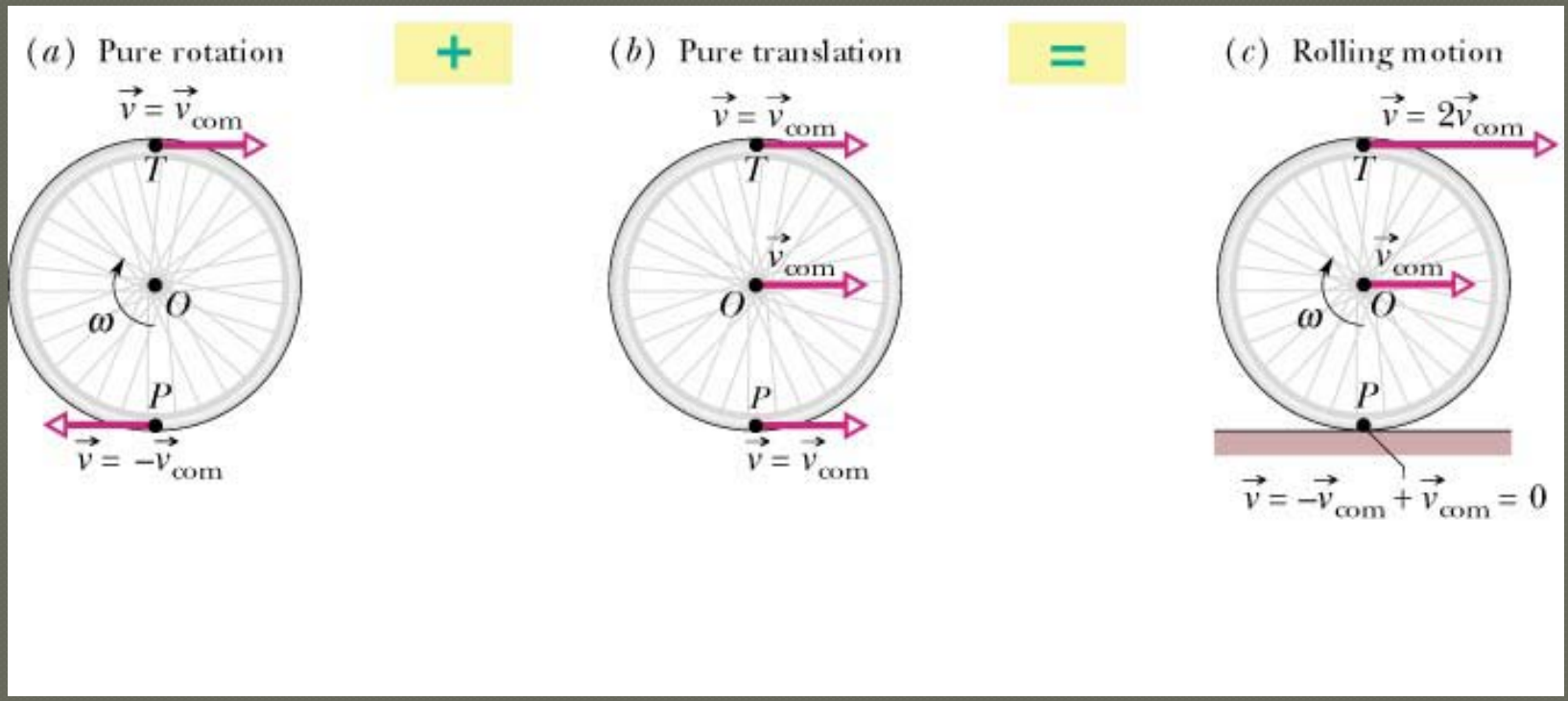
$$v_{\text{cm}} = R\omega$$

$$a_{\text{cm}} = R\alpha$$

Rolamento sem deslizamento

Características

O rolamento pode ser visto como uma superposição de translação pura e rotação em torno do centro de massa.



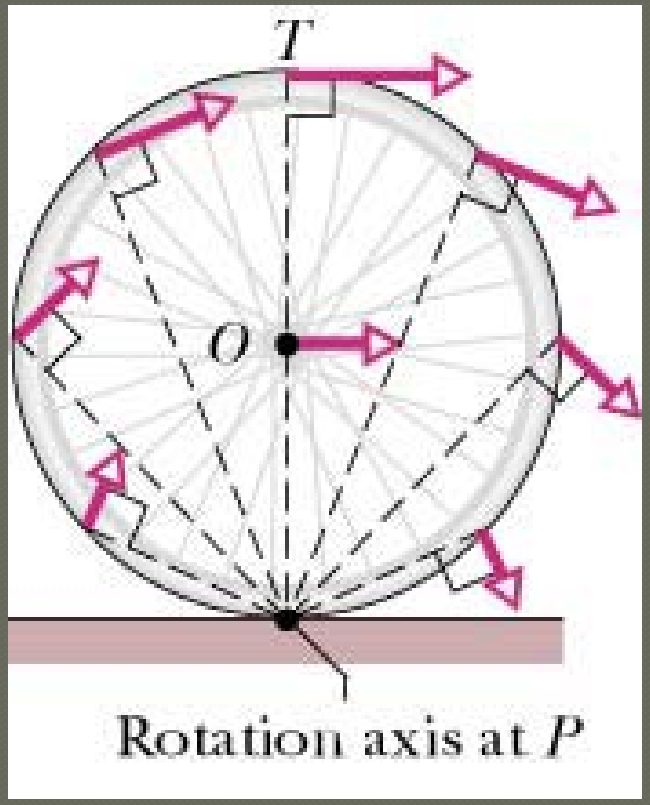
com → *Center of mass*

©2002 by John Wiley & Sons

Rolamento sem deslizamento

Características

No rolamento, o ponto de contato do corpo com a superfície está instantaneamente em repouso em relação à superfície.



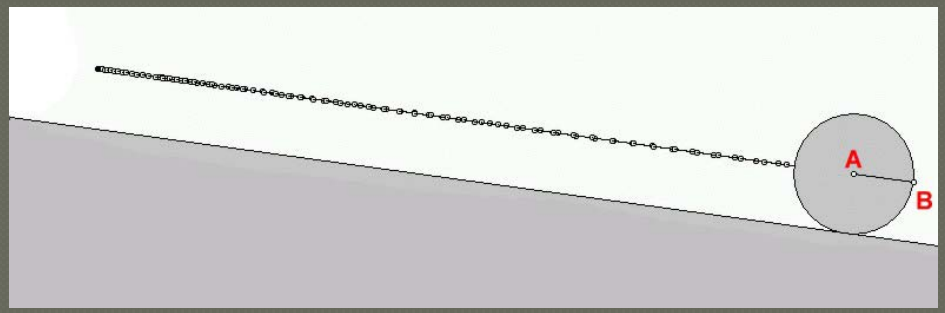
Um corpo que rola pode ser considerado como se estivesse girando em torno de um eixo instantâneo que passasse pelo ponto de contato com o solo (P).

Os vetores mostram as velocidades lineares instantâneas dos pontos escolhidos.

©2002 by John Wiley & Sons

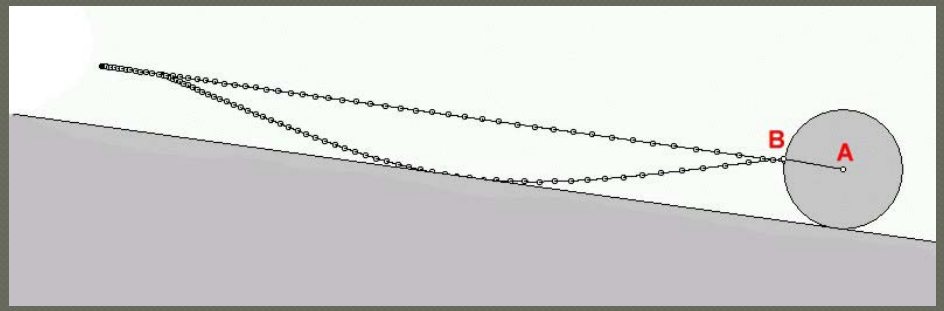
Rolamento sem deslizamento

Comparação com outros tipos de movimentos



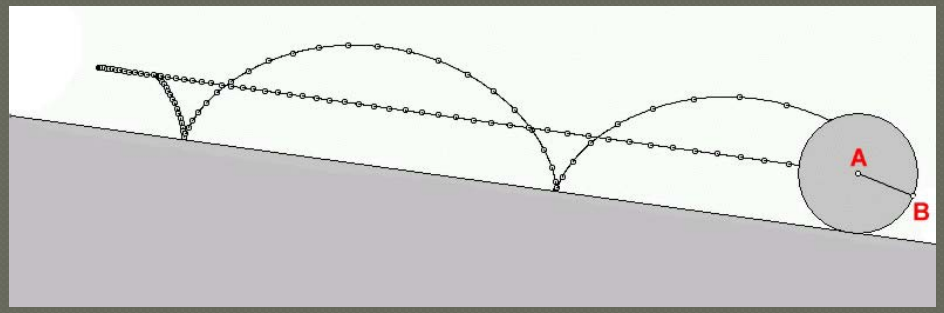
Deslizamento sem rolamento

$$\omega = 0$$



Rolamento com deslizamento

$$v_{cm} > R\omega$$



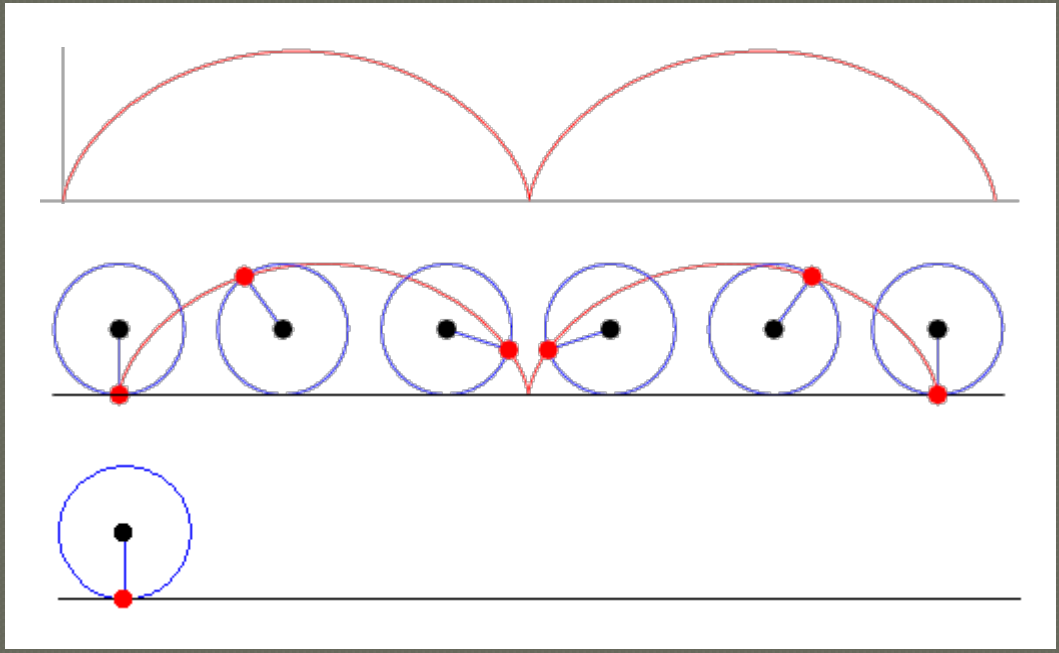
Rolamento sem deslizamento

$$v_{cm} = R\omega$$

Rolamento sem deslizamento

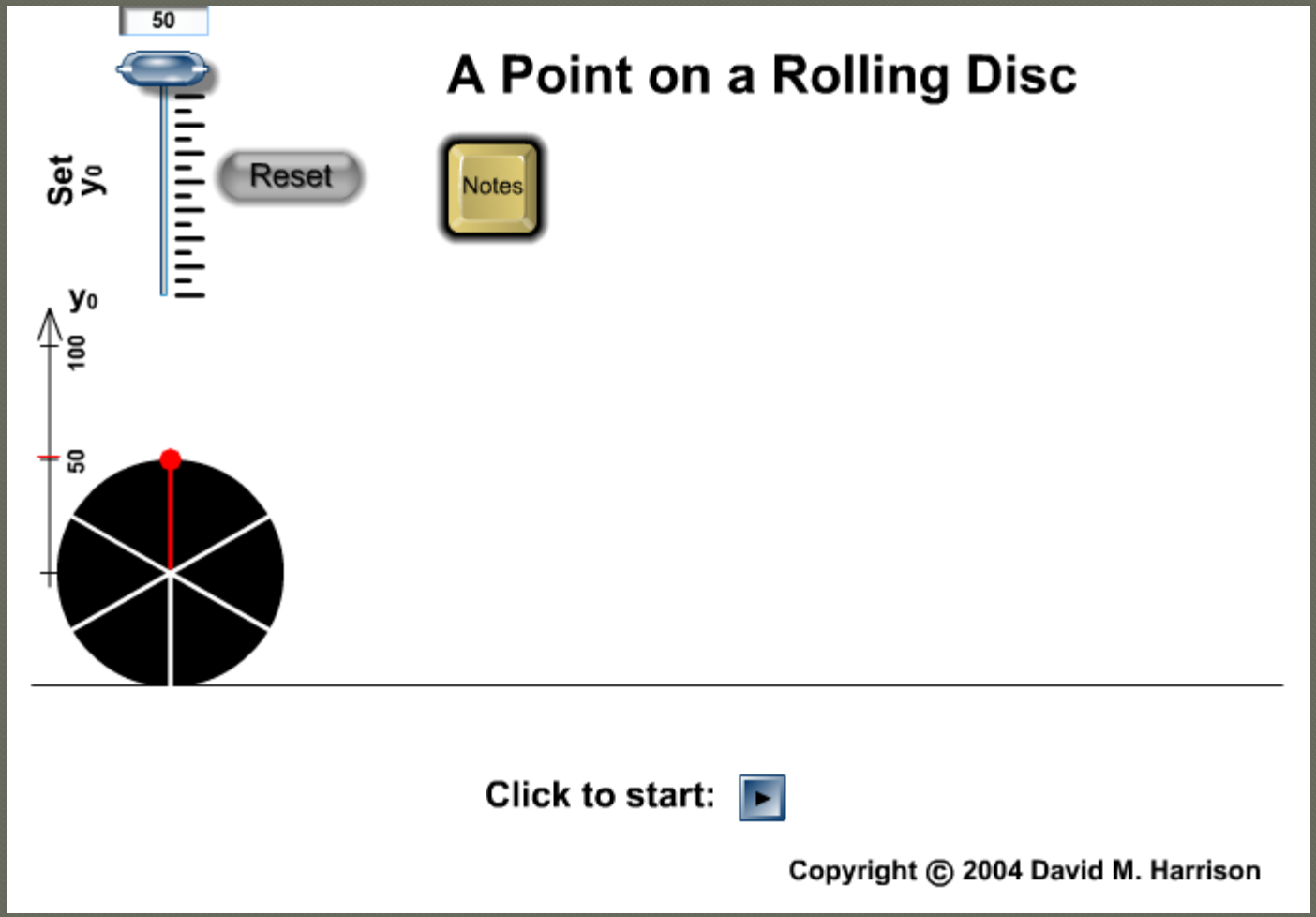
Características

Durante o movimento de rolamento de um corpo circular, um ponto localizado em sua borda descreve uma trajetória denominada *ciclóide*.



Rolamento sem deslizamento

Trajetória de pontos do sistema em rolamento

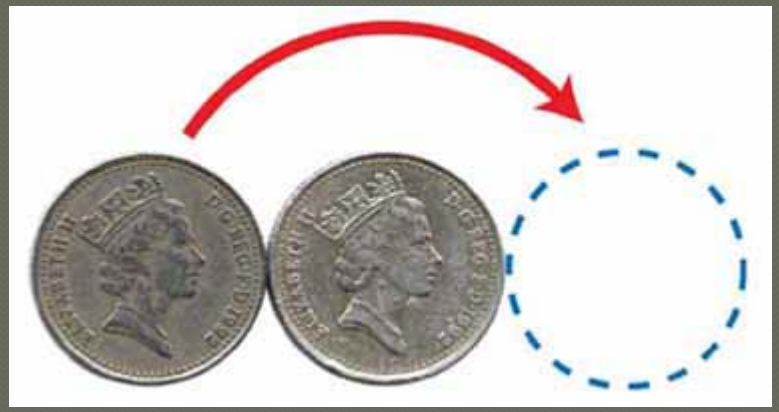


http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/ClassMechanics/RollingDisc/RollingDisc.html

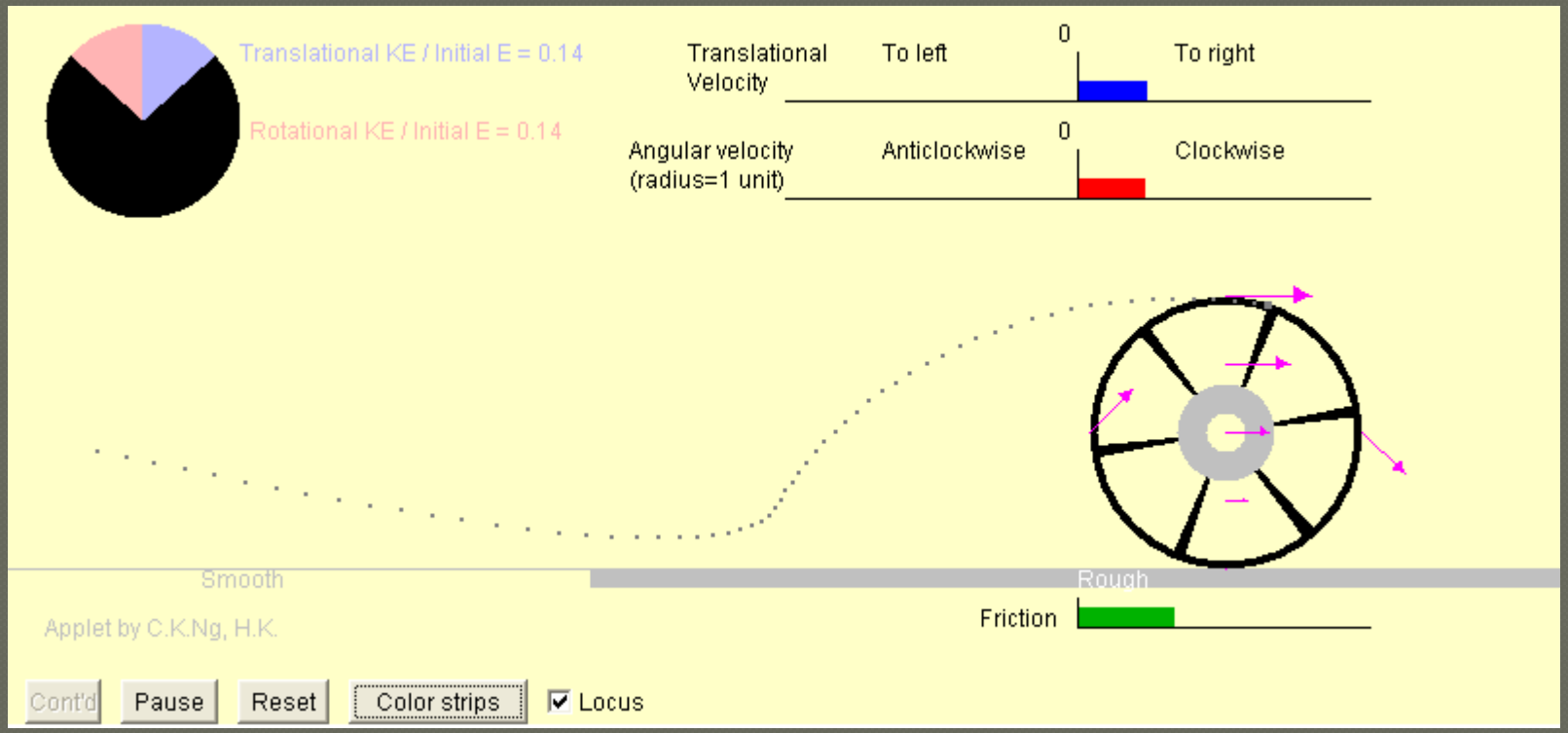
Rolamento sem deslizamento

Desafio

Se a moeda da esquerda rolar sem deslizar ao redor da moeda da direita, que permanece fixa, qual será a orientação da moeda ao chegar à área tracejada?



Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo móvel



© 2007, Chiu-king Ng

Trabalho e potência no movimento de rotação

Trabalho

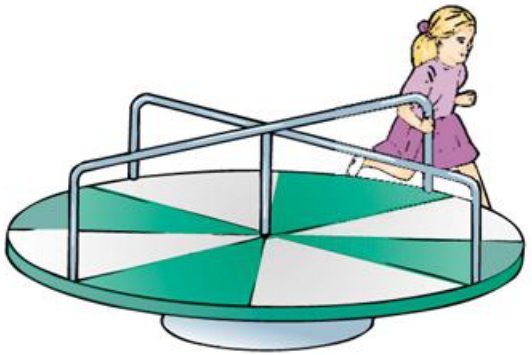
Uma força tangencial atuando sobre um corpo que gira produz trabalho.

$$dW = F_{\tan} ds$$

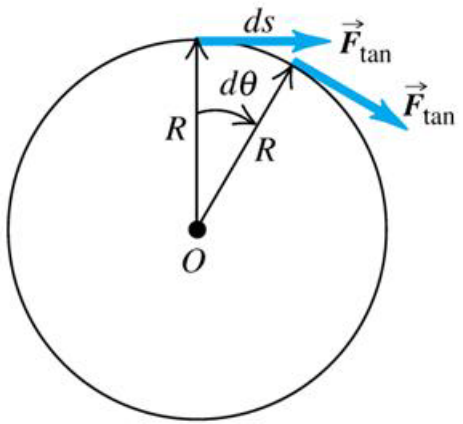
$$dW = F_{\tan} R d\theta$$

$$dW = \tau d\theta$$

$$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta}$$



(a)



Vista de cima para baixo

(b)

©2004 by Pearson Education

Trabalho e potência no movimento de rotação

Teorema do trabalho-energia cinética

$$dW = \tau d\theta$$

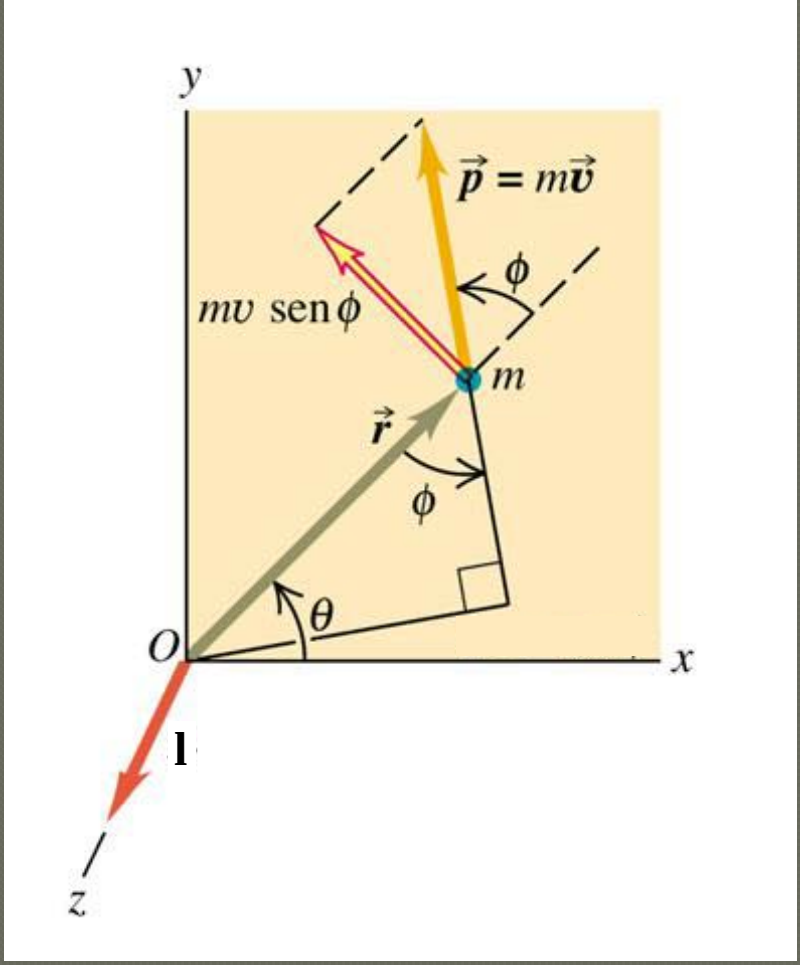
$$\tau d\theta = (I\alpha)d\theta = I\frac{d\omega}{dt}d\theta = I\frac{d\theta}{dt}d\omega = I\omega d\omega$$

$$W_{\text{tot}} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$\boxed{W = \Delta K_{\text{rot}}}$$

Momento angular de uma partícula

Definição



$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Uma partícula de massa m se move no plano xy. O momento angular da partícula é

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

e seu módulo é dado por

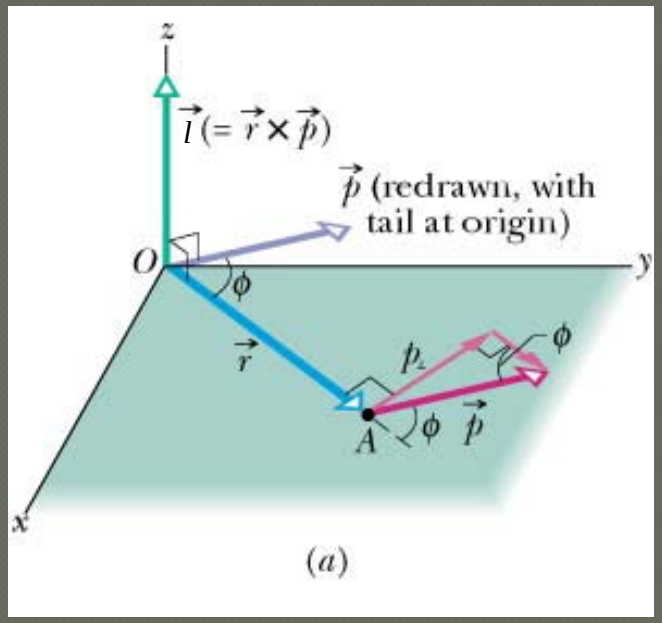
$$l = mvr \text{ sen } \phi.$$

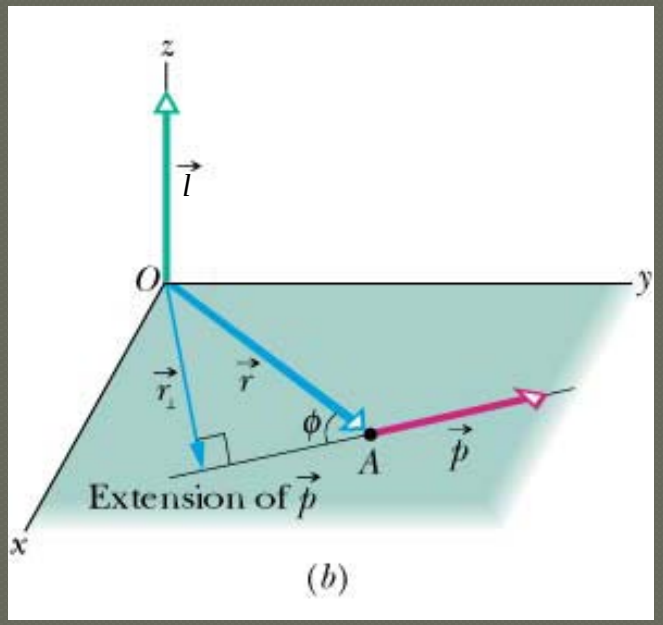
©2004 by Pearson Education

Momento angular de uma partícula

Módulo do momento angular

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$





$$l = rp\,\mathrm{sen}\,\theta = r\left(p\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = rp_\perp$$

$$l = rp\,\mathrm{sen}\,\theta = \left(r\,\mathrm{sen}\,\theta\right)p = r_\perp p$$

©2002 by John Wiley & Sons

Momento angular de uma partícula

Taxa de variação do momento angular

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\left(\mathbf{r}\times m\mathbf{v}\right)}{dt}$$

$$= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v}\right) + \left(\mathbf{r}\times m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$$

$$= \left(\mathbf{v}\times m\mathbf{v}\right) + \left(\mathbf{r}\times m\mathbf{a}\right)$$

$$= 0 + \left(\mathbf{r}\times\mathbf{F}\right)$$

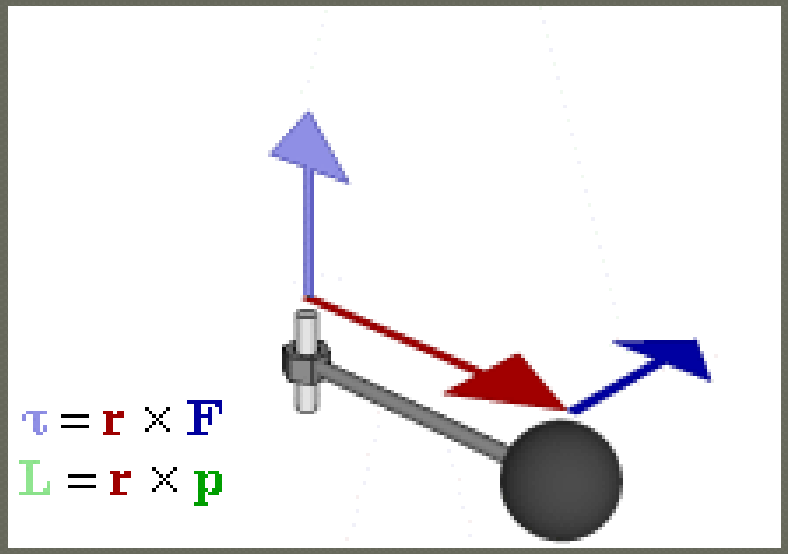
$$\boxed{\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau}}$$

A taxa de variação do momento angular de uma partícula é igual ao torque da força resultante que atua sobre ela.

Compare com:

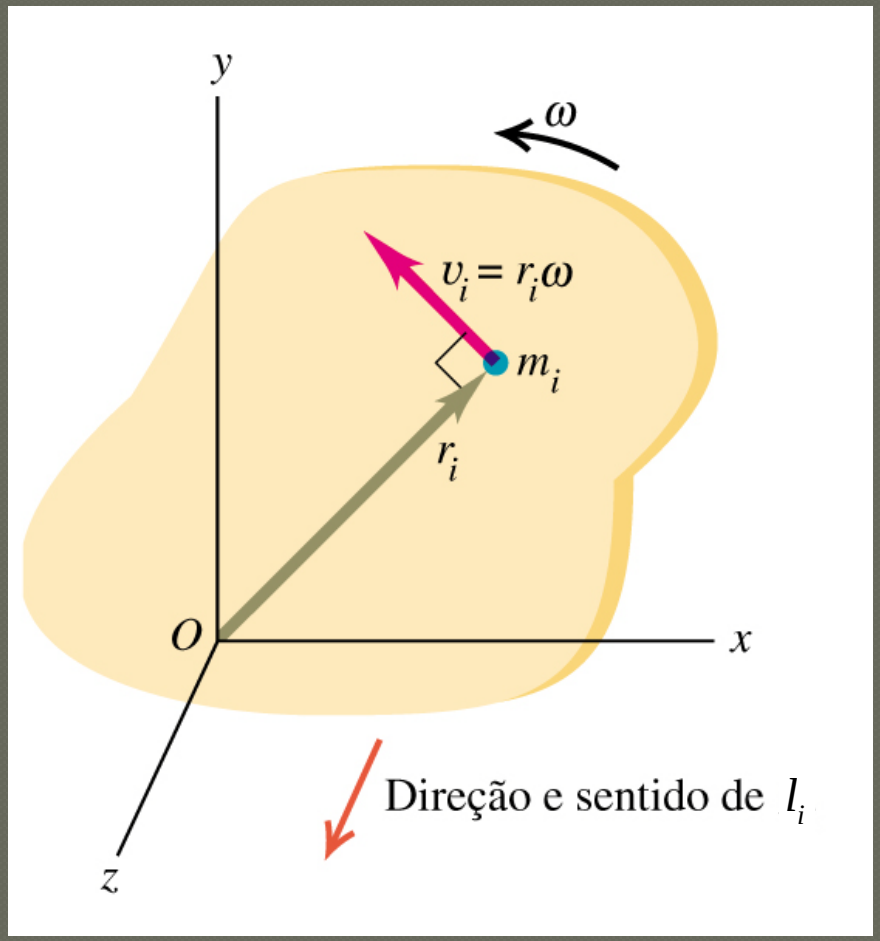
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

Torque e momento angular



Momento angular de um corpo rígido

Seção de um corpo rígido localizada no plano *xy*:



Cálculo do momento angular de um corpo rígido girando. Cada partícula do corpo gira ao longo de uma circunferência em torno do eixo de rotação (neste caso o eixo *Oz*) com a mesma velocidade angular.

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = r_i m_i v_i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$l_i = r_i m_i (r_i\omega) = m_i r_i^2 \omega$$

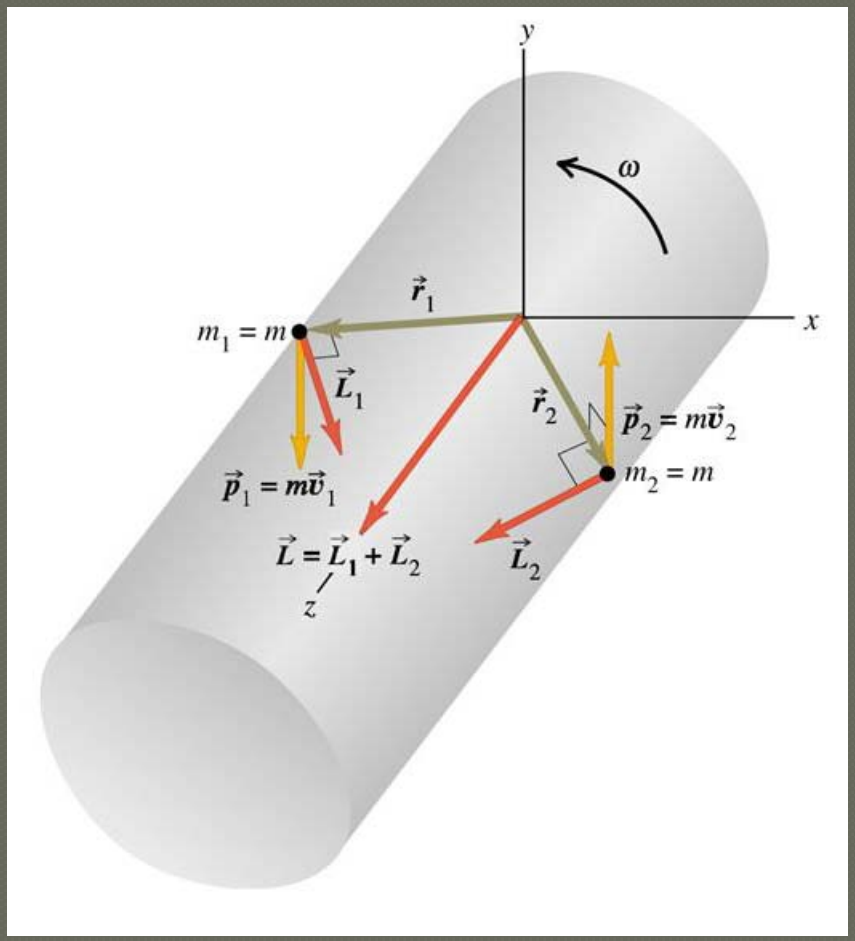
$$L = \sum l_i = \left(\sum m_i r_i^2\right)\omega$$

$$L = I\omega$$

©2004 by Pearson Education

Momento angular de um corpo rígido

Seção de um corpo rígido localizada no plano *xy*:



Duas partículas de massa $m_1 = m_2 = m$ localizadas simetricamente de cada lado do eixo de rotação (o eixo *Oz*). Os momentos angulares $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ das partículas individuais não estão sobre o eixo de rotação, porém a soma vetorial $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$ permanece ao longo desse eixo.

$$\mathbf{L} \propto I$$

Observação importante:

Este resultado somente é válido quando o eixo de rotação for um eixo de simetria.

©2004 by Pearson Education

Conservação do momento angular

Enunciado

Quando o torque externo resultante que atua sobre um sistema é igual a zero, o momento angular do sistema permanece constante.

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

$\mathbf{L} = \text{constante}$

$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f$ ⇨ Corpo simétrico em relação ao eixo de rotação.

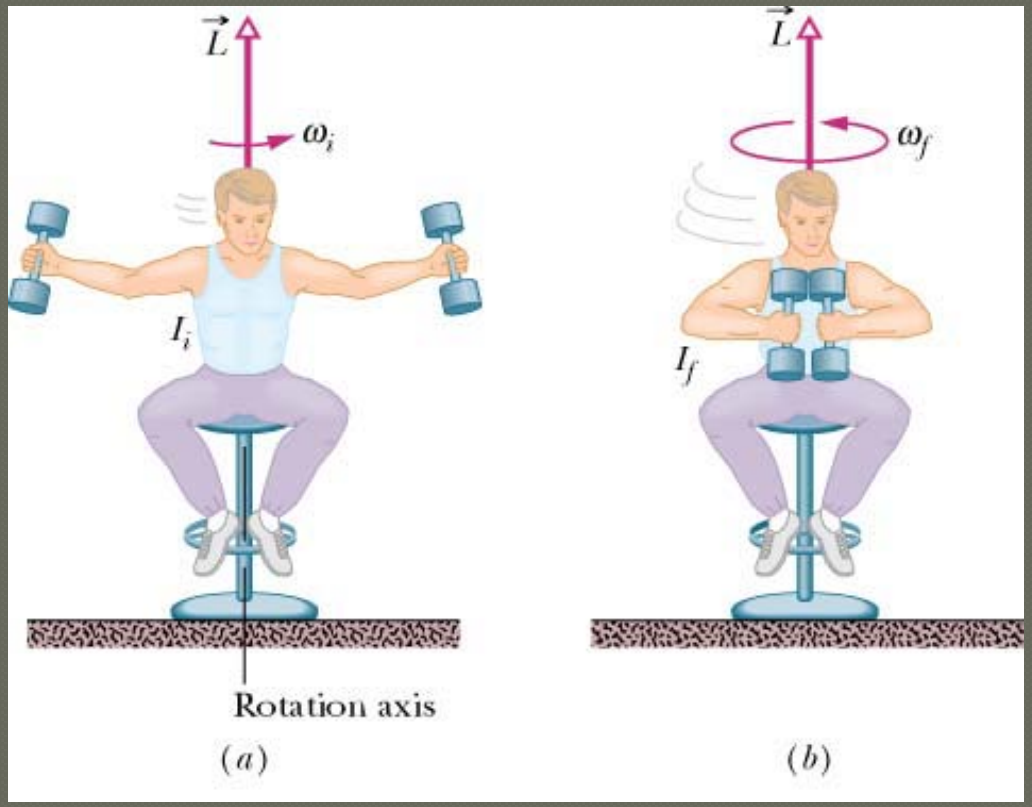
$L_{z,i} = L_{z,f}$ ⇨ Corpo qualquer

$$\boxed{I_i \omega_i = I_f \omega_f}$$

Conservação do momento angular

Exemplos

Atleta sobre uma plataforma giratória segurando alteres.



$I_i \quad \omega_i$ $\qquad$ $I_f \quad \omega_f$

©2002 by John Wiley & Sons

Conservação do momento angular

Exemplos

http://www.youtube.com/watch?v=qiYKonNEc-c

Conservação do momento angular

Exemplos

Demonstração com Geomag

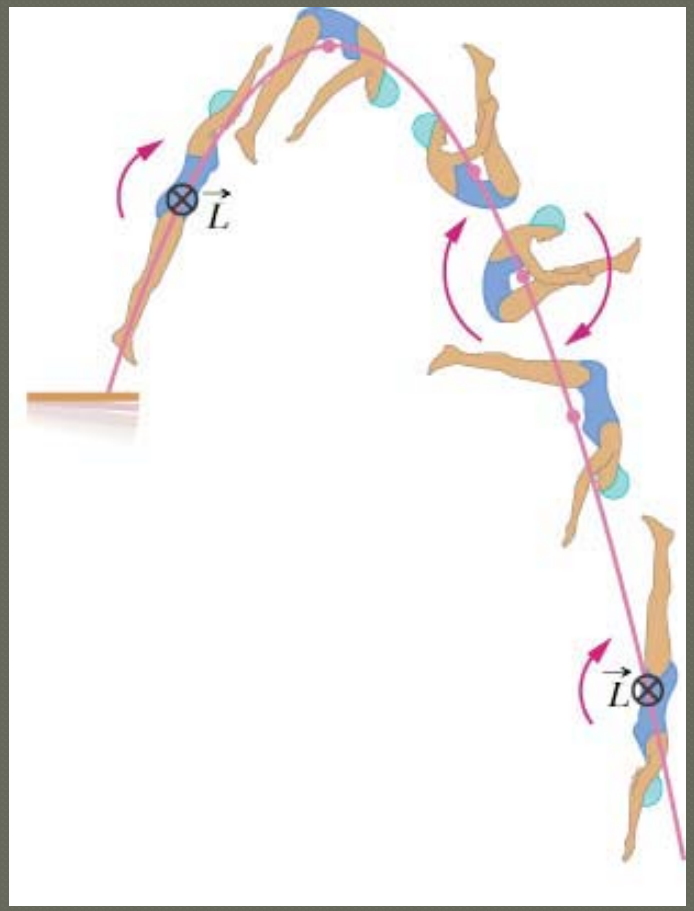
http://www.youtube.com/watch?v=ebjHSJM2bec

Conservação do momento angular

Exemplos

Salto ornamental com giro em posição de canivete.

$I_1 \quad \omega_1$



$I_2 \quad \omega_2$

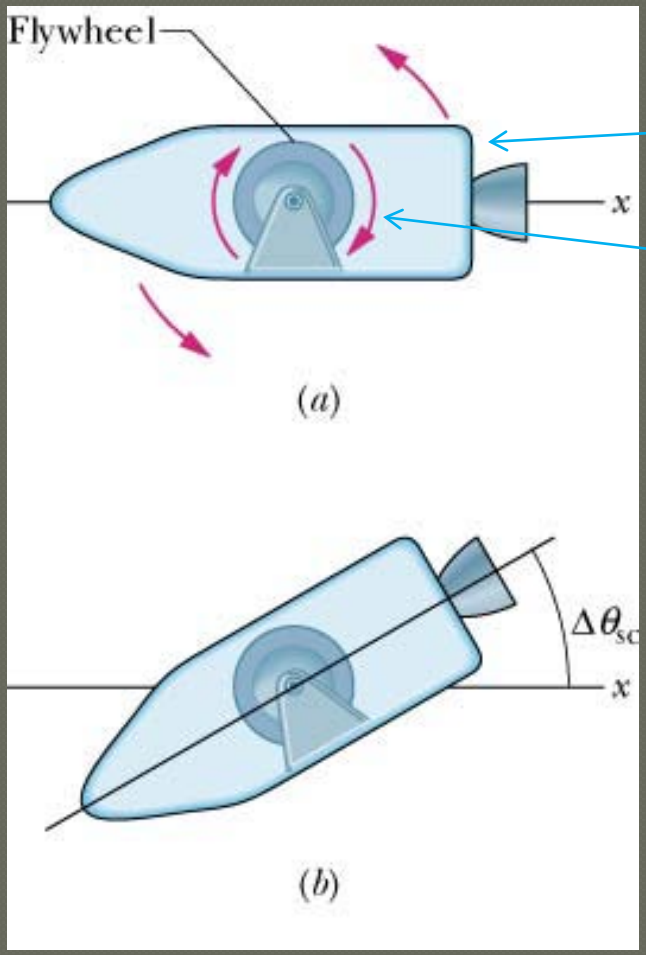
$I_3 \quad \omega_3$

©2002 by John Wiley & Sons

Conservação do momento angular

Exemplos

Reorientação de uma nave por meio do giro de um volante.



$+L_{z,\text{foguete}}$

$-L_{z,\text{roda}}$

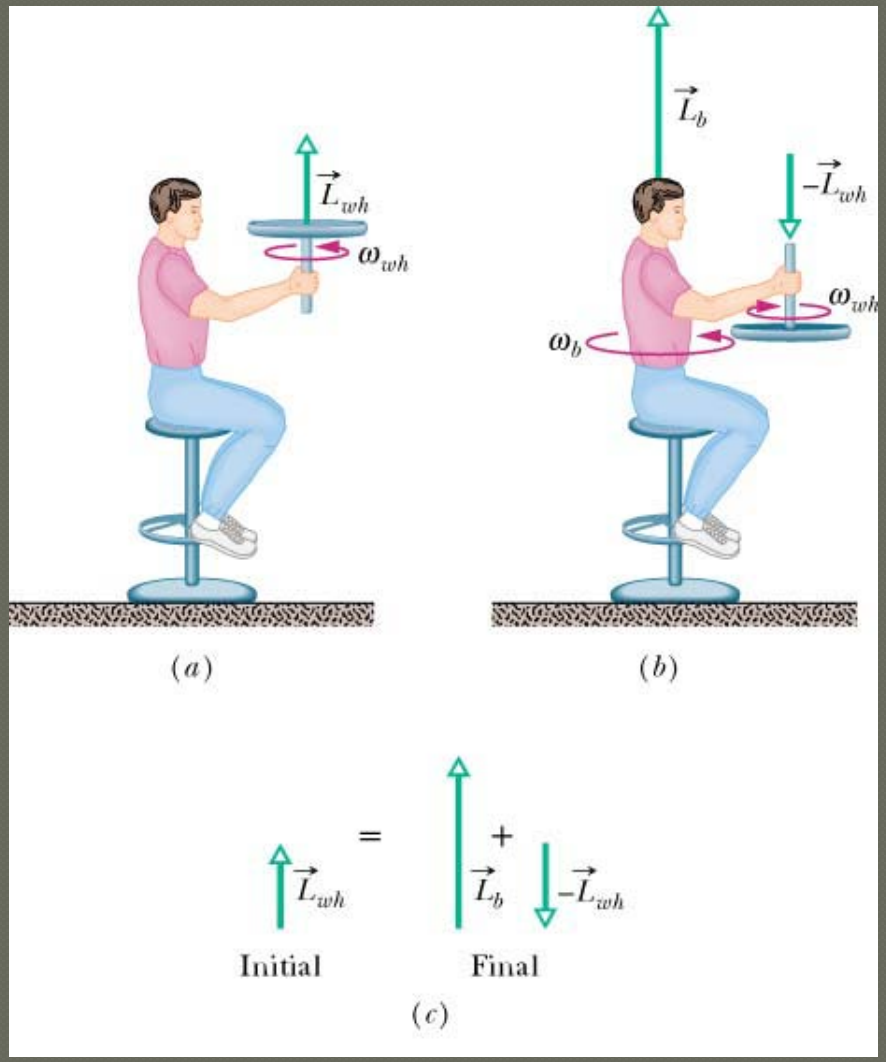
$L_z = 0$

$L_z = 0$

©2002 by John Wiley & Sons

Conservação do momento angular

Exemplos



(a) Estudante segura uma roda de bicicleta que gira. O momento angular total do sistema é $\mathbf{L}_i$.

(b) Quando a roda é invertida, o estudante começa a girar.

(c) O momento angular total final deve ser igual ao momento angular inicial.

©2002 by John Wiley & Sons

Conservação do momento angular

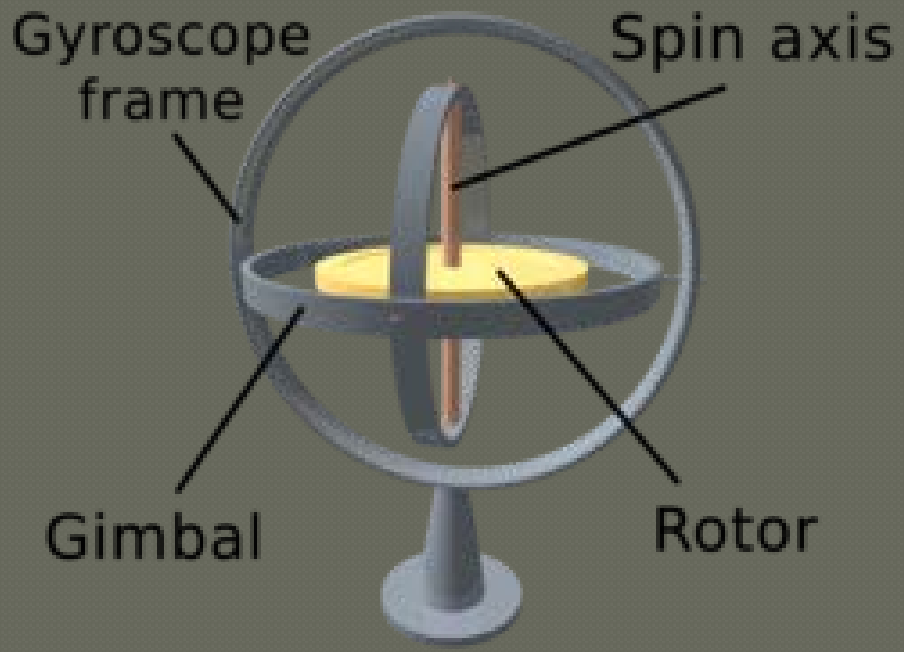
Exemplos

http://www.youtube.com/watch?v=V3UsrfHa4MQ

Giroscópios e precessão

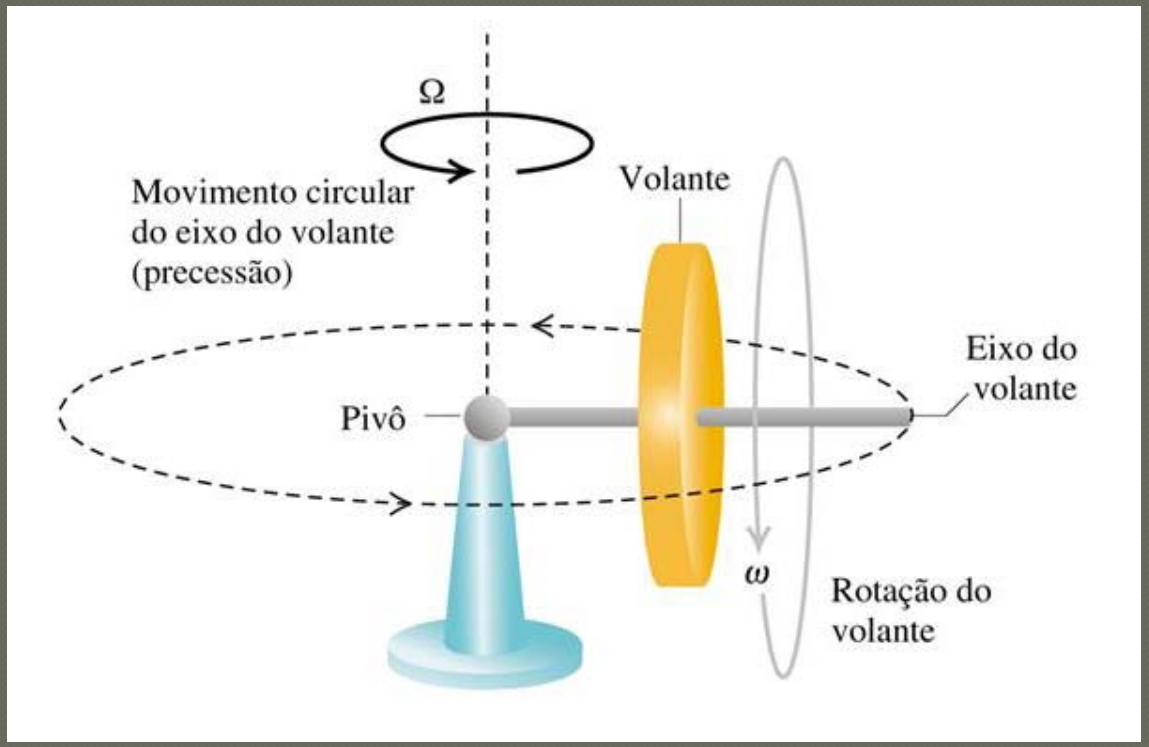
Giroscópio

Um giroscópio é um dispositivo usado para medir ou manter a orientação no espaço, baseado no princípio da conservação do momento angular.



Giroscópios e precessão

Precessão

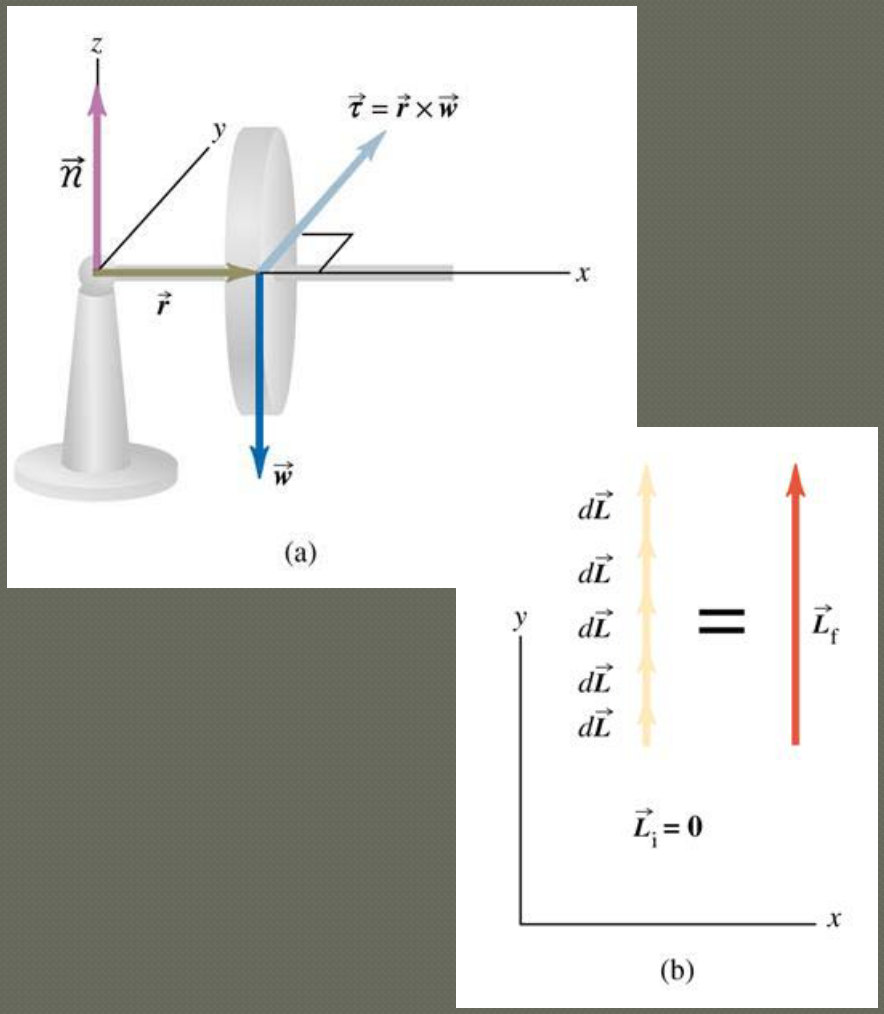


A figura mostra um giroscópio girando com velocidade angular ω e suportado em uma de suas extremidades. O volante e o eixo não caem, mas se deslocam com um movimento circular denominado precessão. A velocidade angular de precessão é representada por Ω.

©2004 by Pearson Education

Giroscópios e precessão

Precessão



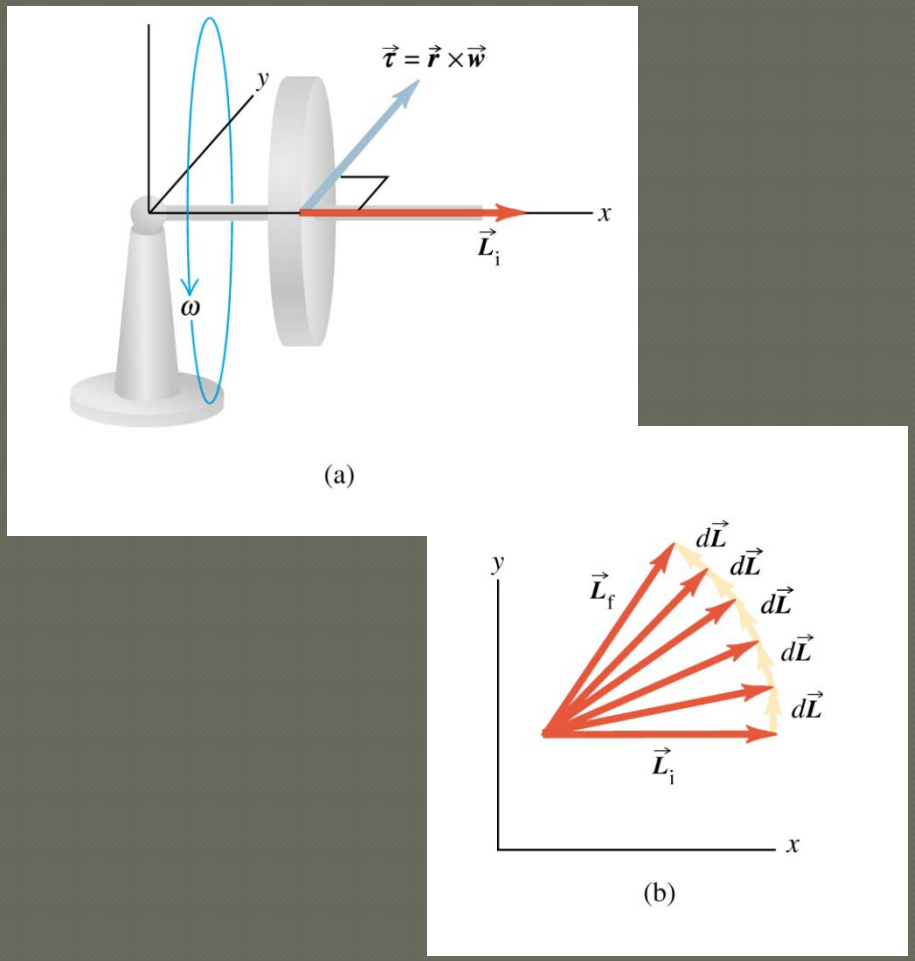
(a) O volante está inicialmente em repouso. O torque τ é devido ao peso **w**.

(b) Vista do giroscópio de cima para baixo. Em cada intervalo de tempo sucessivo *dt*, o torque produz variação $d\mathbf{L}$ do momento angular; essa variação ocorre na mesma direção de τ. O momento angular inicial é igual a zero, de modo que os vetores $d\mathbf{L}$ são paralelos, e o momento angular final $\mathbf{L}_f$ também tem a mesma direção de τ.

©2004 by Pearson Education

Giroscópios e precessão

Precessão



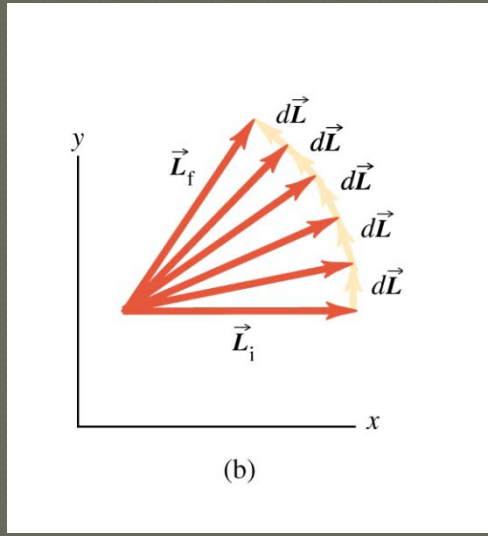
(a) O volante gira inicialmente com momento angular $\mathbf{L}_i$.

(b) Existindo um momento angular inicial, cada variação $d\mathbf{L}$ é perpendicular a $\mathbf{L}$; isso produz uma contínua variação da direção de $\mathbf{L}$, ocasionando a precessão. O módulo do momento angular permanece constante: $|\mathbf{L}_i| = |\mathbf{L}_f|$.

©2004 by Pearson Education

Giroscópios e precessão

Velocidade angular de precessão



$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\left|\frac{d\mathbf{L}}{\mathbf{L}}\right|}{dt} = \frac{\frac{dL}{dt}}{L} = \frac{\tau}{L} = \frac{wr}{I\omega}$$

©2004 by Pearson Education

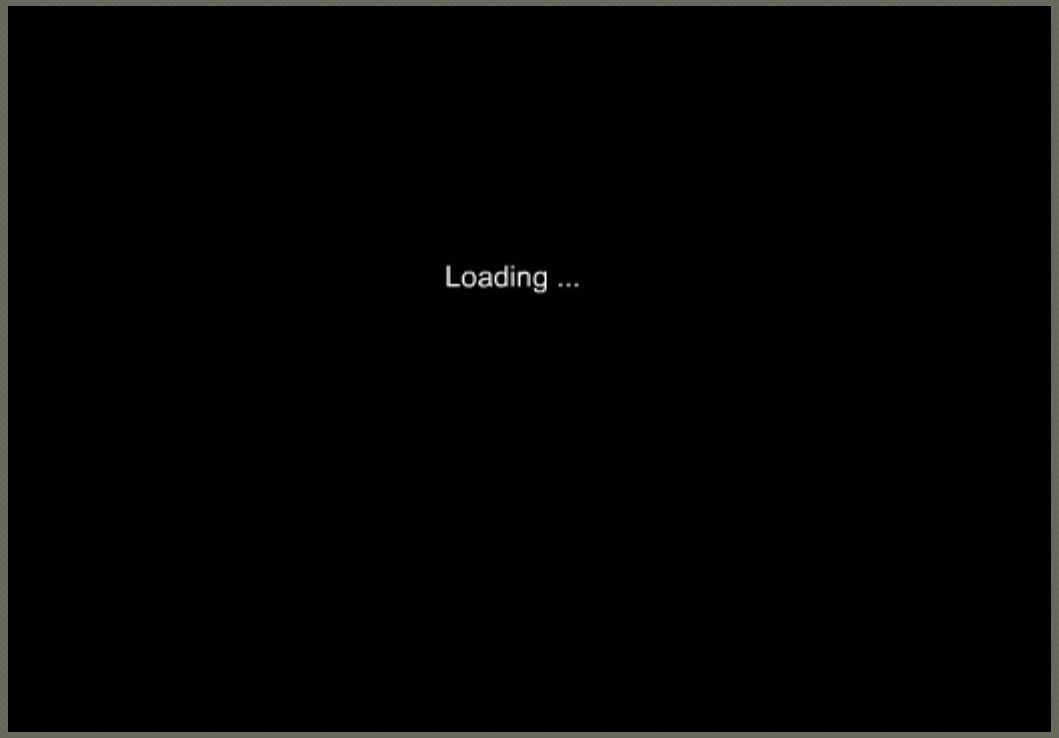
Giroscópios e precessão

Precessão

http://phys23p.sl.psu.edu/phys_anim/mech/gyro_s1_p.avi

Giroscópios e precessão

Precessão



http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/ClassMechanics/Precession/Precession.html

Giroscópios e precessão

Precessão

http://br.youtube.com/watch?v=OprO3sLA2_Y

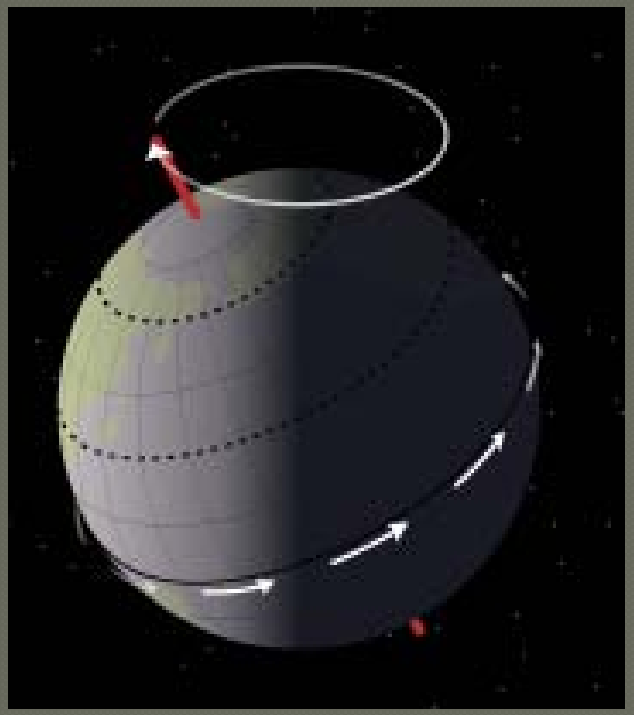
Giroscópios e precessão

Precessão

http://br.youtube.com/watch?v=jwSCM-Ipy2Y

Giroscópios e precessão

Precessão



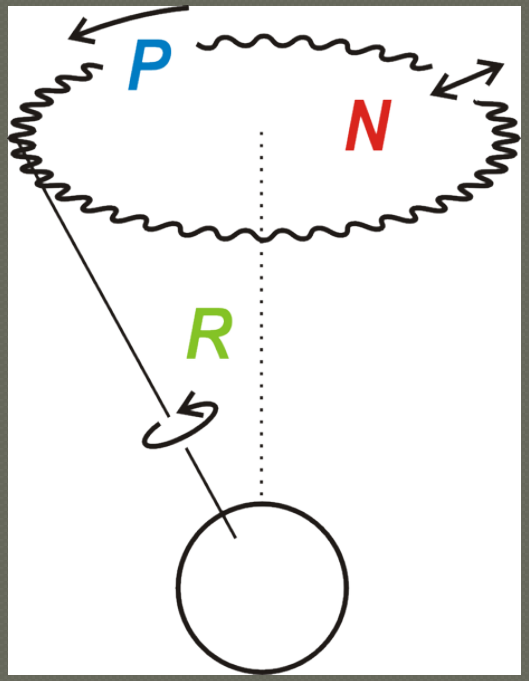
Em astronomia, precessão refere-se ao movimento de rotação do eixo de um corpo, como um planeta, em relação a um referencial inercial. Em particular, refere-se à precessão do eixo rotação da Terra, também chamado de precessão dos equinócios.

O período da precessão do eixo da Terra é cerca de 26.000 anos.

Giroscópios e precessão

Nutação

Nutação é um movimento ligeiramente irregular no eixo de rotação de um objeto que possui simetria predominantemente axial, como um giroscópio ou um planeta.



Rotação (verde), precessão (azul) e nutação (vermelho) da Terra.

O período da nutação da órbita da Terra é cerca de 18,6 anos.

Giroscópios e precessão

Nutação

http://phys23p.sl.psu.edu/phys_anim/mech/gyro_s1_nu.avi

Giroscópios e precessão

Precessão

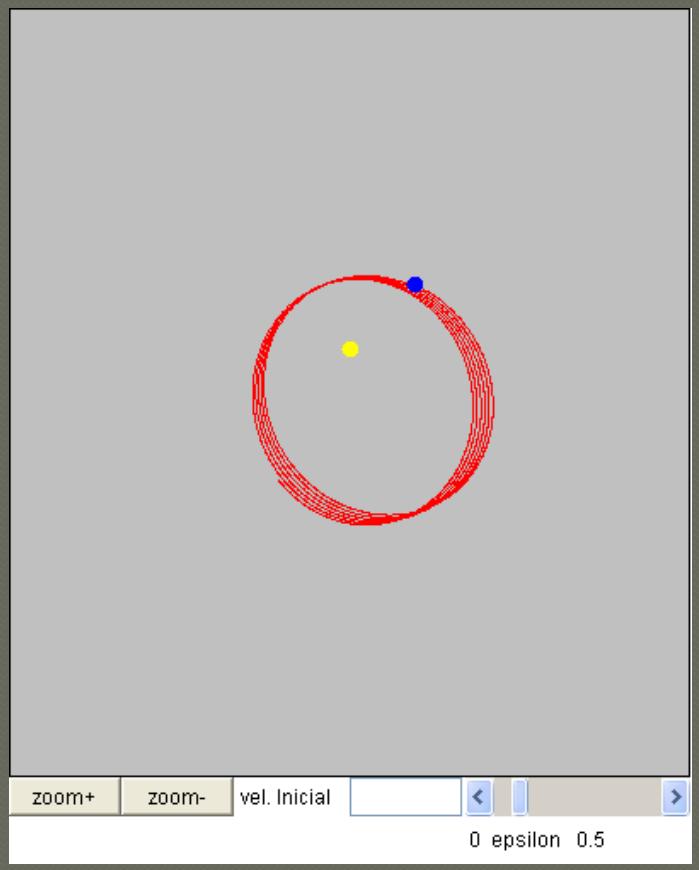
http://br.youtube.com/watch?v=5nsCjTApzH8

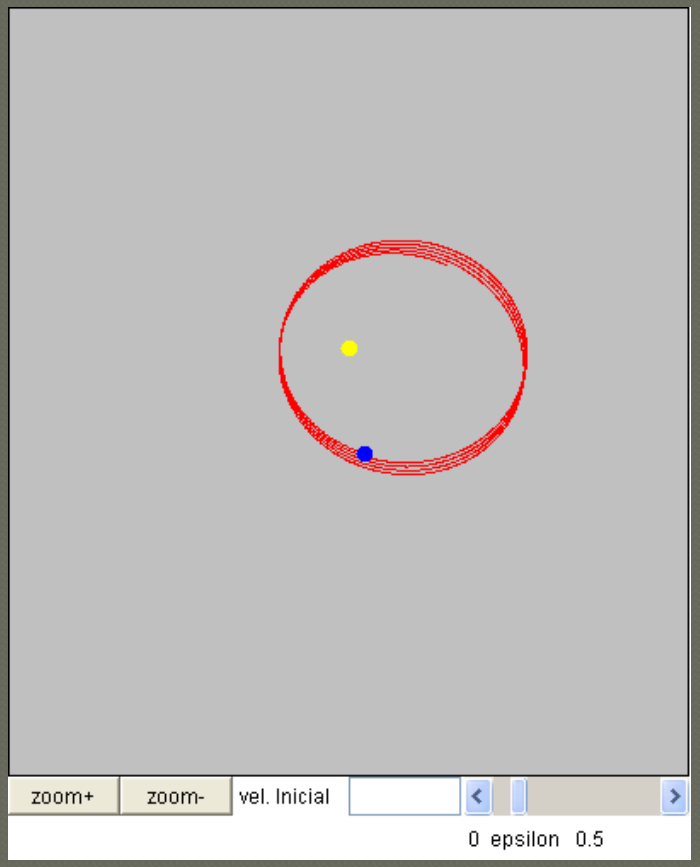
Giroscópios e precessão

Precessão

http://www.youtube.com/watch?v=IEwAry0GARw

Precessão dos equinócios





© 2000, J. Pinto da Cunha