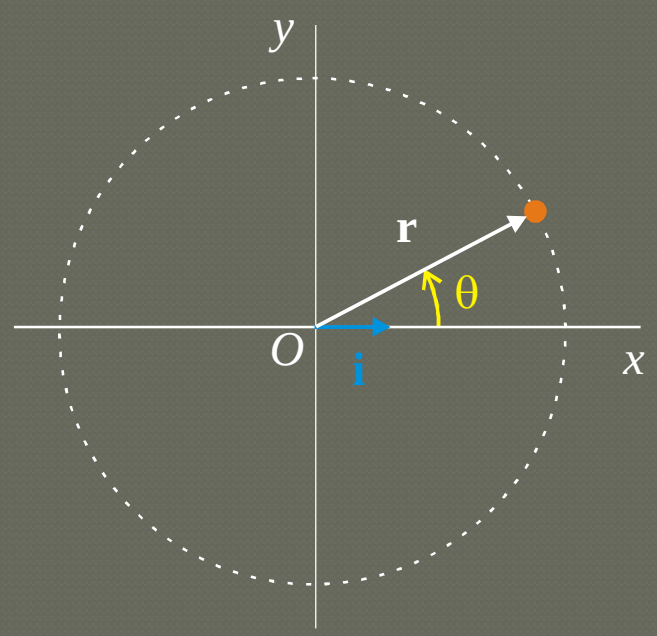
Física 1

9 – Rotação de Corpos Rígidos

Posição angular

A posição angular (θ) de um objeto no plano *xy* é o ângulo entre o vetor unitário **i** e o vetor posição **r** do objeto, medido no sentido anti-horário a partir de **i**.

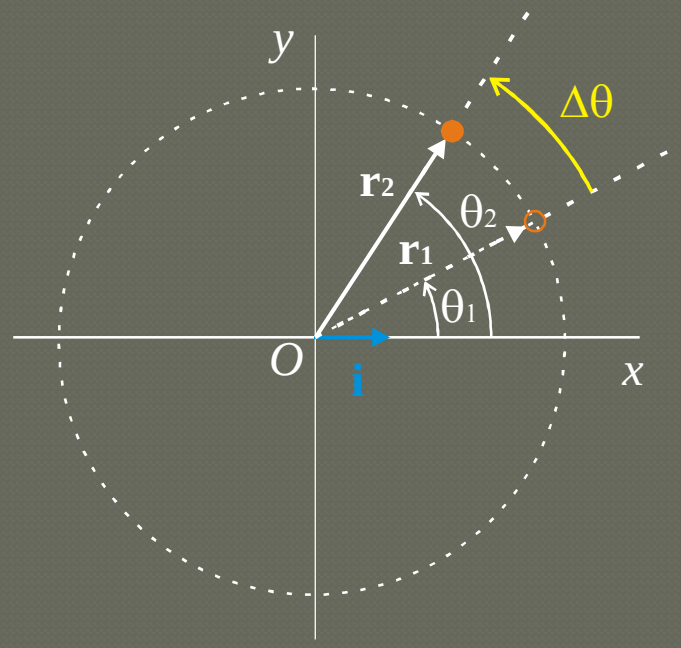


Posição angular é grandeza escalar.

Unidade SI: rad

Deslocamento angular

O deslocamento angular ($\Delta\theta$) corresponde à variação ocorrida entre sua posição angular inicial (θ_1) e sua posição angular final (θ_2).



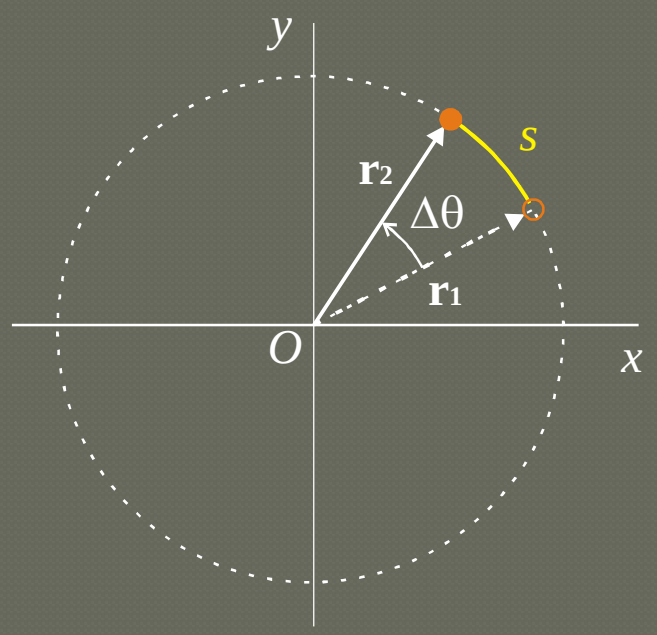
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

Deslocamento angular é grandeza escalar.

Unidade SI: rad

Distância percorrida

A distância percorrida (s) por um objeto durante um deslocamento angular ($\Delta\theta$) corresponde ao arco descrito pela sua trajetória.



$$s = r\Delta\theta$$

Distância percorrida é grandeza escalar.

Unidade SI: m

Velocidade angular

Velocidade angular média

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Velocidade angular instantânea

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Unidade SI: rad/s

Aceleração angular

Aceleração angular média

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Aceleração angular instantânea

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Unidade SI: rad/s^2

Rotação com velocidade angular constante

Derivação da equação de movimento

$$\omega = \omega_0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0$$

$$d\theta = \omega_0 dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \omega_0 \int_{t_0}^{t} dt$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 \left(t - t_0\right)$$

$$t_0 = 0$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t}$$

Equação de movimento translacional:

$$\boxed{x = x_0 + v_{0x} t}$$

Rotação com aceleração constante

Movimento translacional (Direção fixa)	Movimento rotacional (Eixo fixo)
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$
$x - x_0 = \frac{\left(v + v_0\right)}{2} t$	$\theta - \theta_0 = \frac{\left(\omega + \omega_0\right)}{2} t$
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2} a t^2$	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2$

Queda de chaminés

Copenhague, 1950

Uma chaminé em queda com freqüência não têm resistência suficiente para fornecer a aceleração tangencial, para grandes raios, que seria necessária se o objeto como um todo girasse como um corpo rígido com aceleração angular constante.

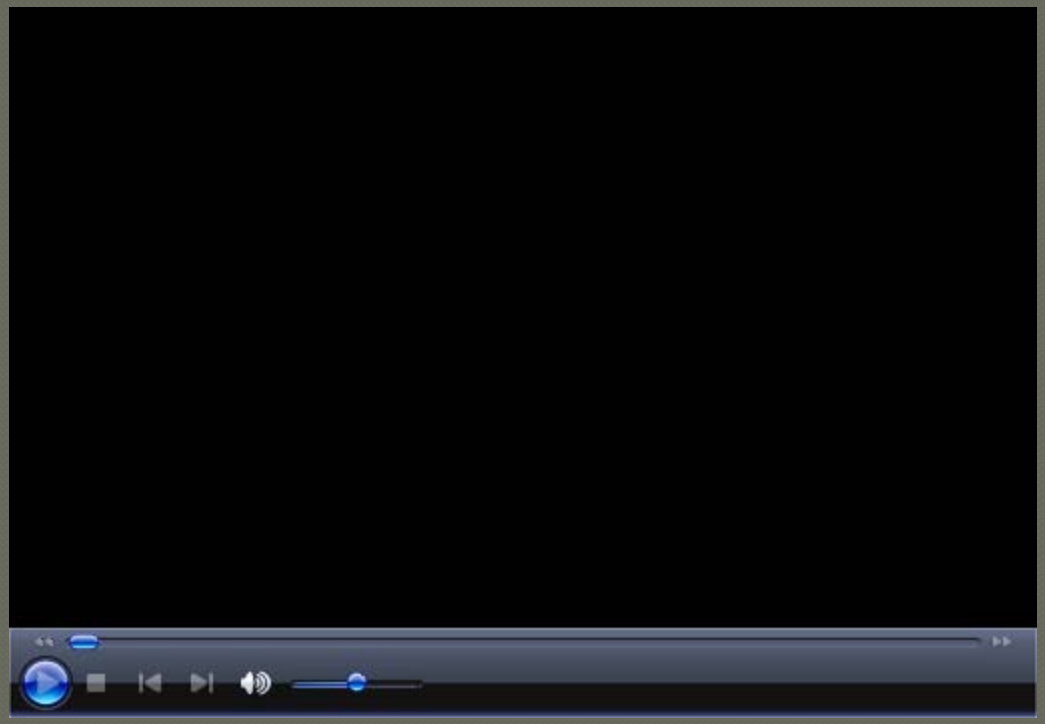
Queda de chaminés

Bromley-le-Bow, Londres, 1974

Para cair como um corpo íntegro, todas as partes da chaminé deveriam desenvolver a mesma aceleração angular α. No entanto, isso resultaria em que as partes mais altas da chaminé tivessem aceleração tangencial maior do que a aceleração da gravidade ($a_{tan} = \alpha R$). Como a argamassa não têm resistência suficiente para manter a coesão de todas a suas partes, a chaminé se quebra.

Cinemática rotacional

Queda de chaminés

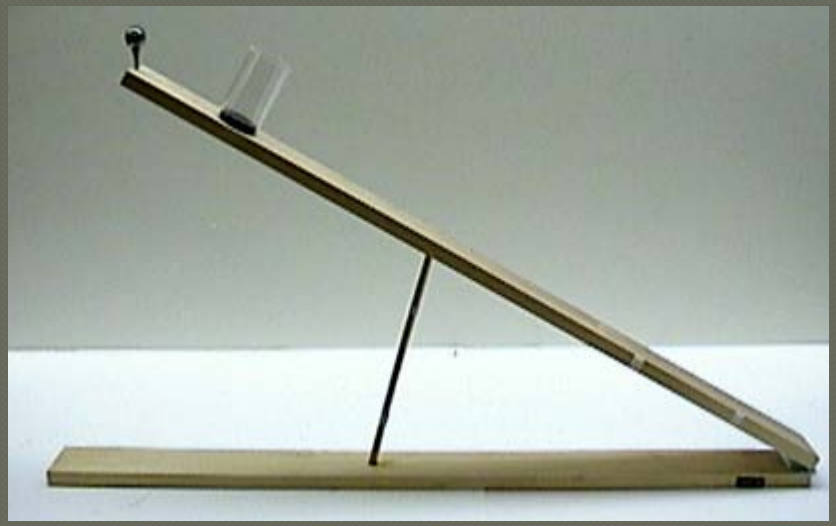


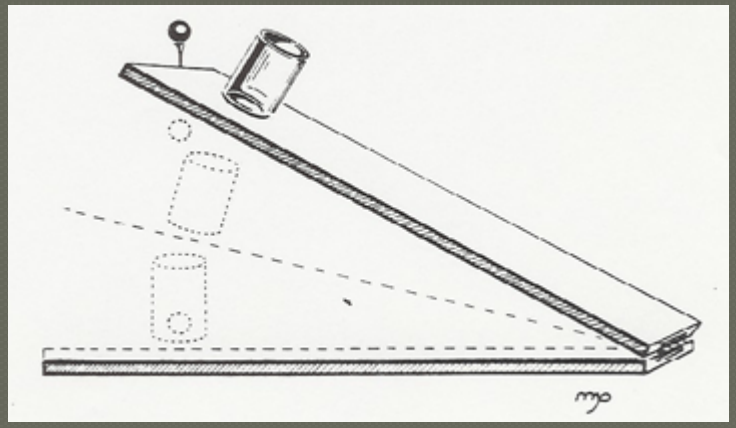
Tambaú, SP

http://www.youtube.com

Cinemática rotacional

Queda de chaminés

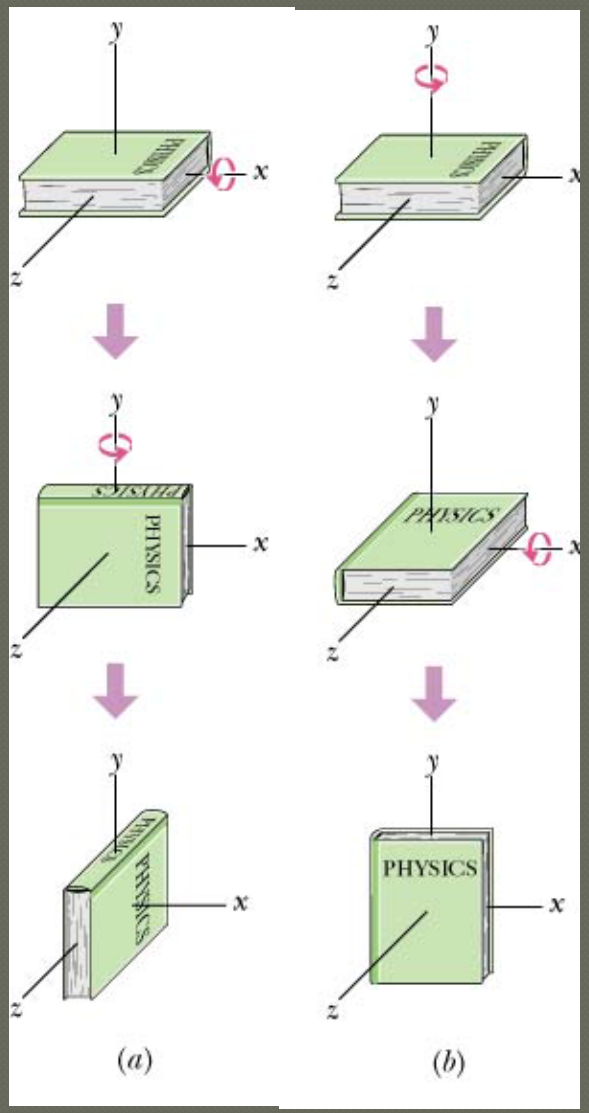




Neste experimento, uma bolinha está apoiada livremente sobre um suporte no alto da rampa, logo acima de um copinho colado na rampa. Quando o apoio é subitamente retirado, a rampa gira em torno do seu eixo fazendo com que a bolinha também caia. Todos os pontos da rampa desenvolvem a mesma aceleração angular. No entanto as partes mais afastadas do eixo de rotação ficam sujeitas a uma aceleração tangencial maior do que g. Como a bolinha livre acelera apenas com g, ela perde contato com seu suporte e, durante a descida, acaba caindo dentro do copinho.

Grandezas rotacionais como vetores

Deslocamento angular



(a) $\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$

(b) $\Delta\theta_2 + \Delta\theta_1$

O deslocamento angular não obedece à lei comutativa da adição.

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 \neq \Delta\theta_2 + \Delta\theta_1$$

Deslocamento angular não é grandeza vetorial.

©2002 by John Wiley & Sons

Grandezas rotacionais como vetores

Deslocamento angular diferencial

O deslocamento angular diferencial obedece à lei comutativa da adição, bem como às demais operações vetoriais.

$$d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2 = d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1$$

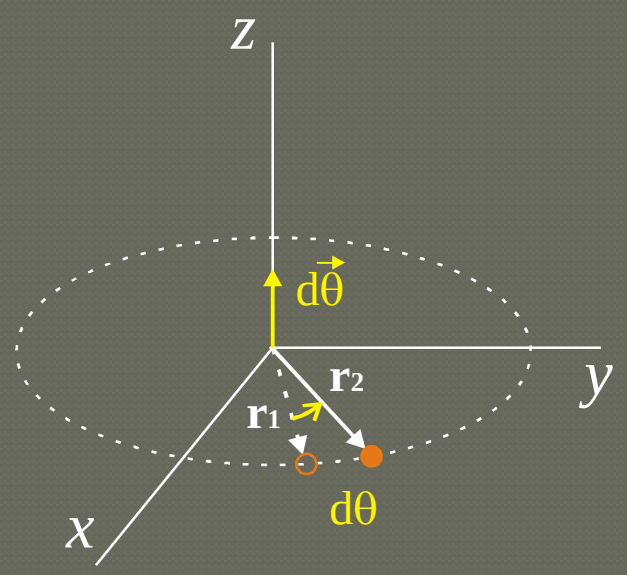
$$\Downarrow$$

Deslocamento angular diferencial é grandeza vetorial.

Grandezas rotacionais como vetores

Deslocamento angular diferencial

Deslocamento angular diferencial é grandeza vetorial.



Grandezas rotacionais como vetores

Velocidade angular e aceleração angular

A natureza vetorial do deslocamento diferencial $\mathbf{d}\theta$ implica em que a velocidade angular (ω) e a aceleração angular (α), grandezas definidas em termos de $\mathbf{d}\theta$, também sejam grandezas vetoriais.

Velocidade angular instantânea

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

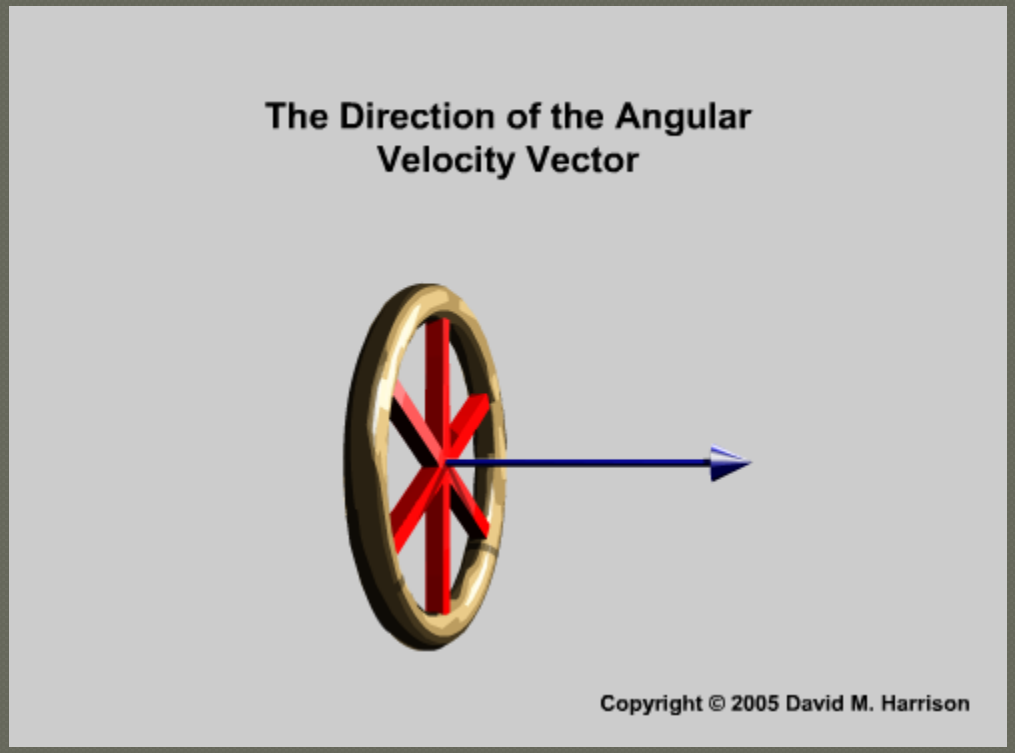
Aceleração angular instantânea

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Grandezas rotacionais como vetores

Velocidade angular

A velocidade angular é grandeza vetorial, pois é definida em termos de $d\theta$.



$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

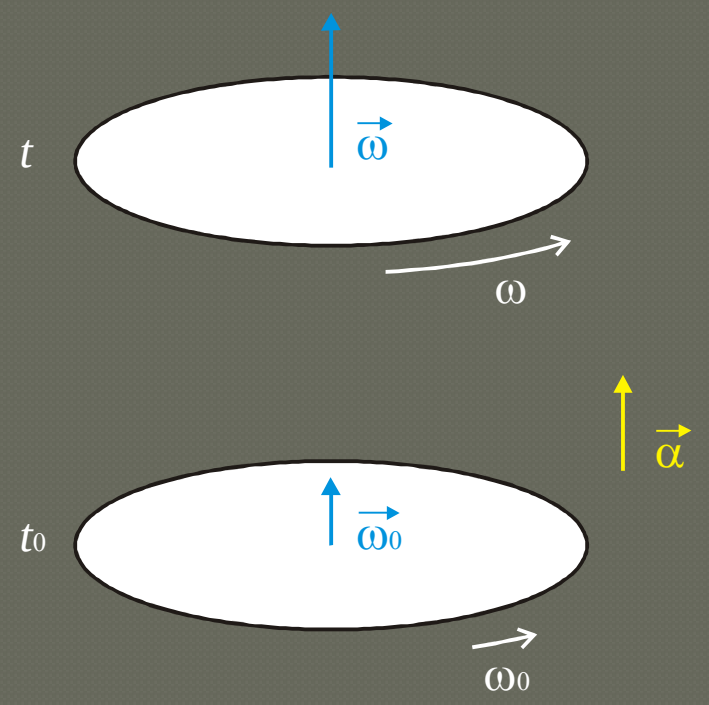
Grandezas rotacionais como vetores

Velocidade angular

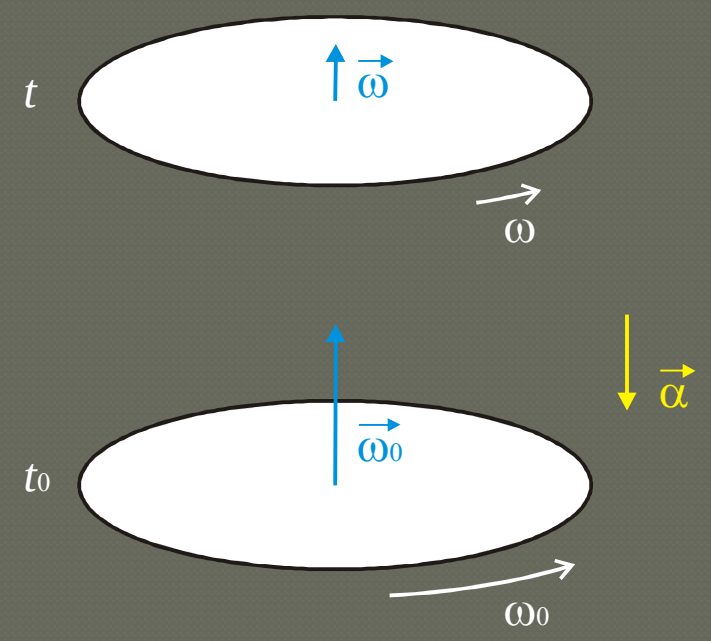
Grandezas rotacionais como vetores

Aceleração angular

Aceleração angular positiva

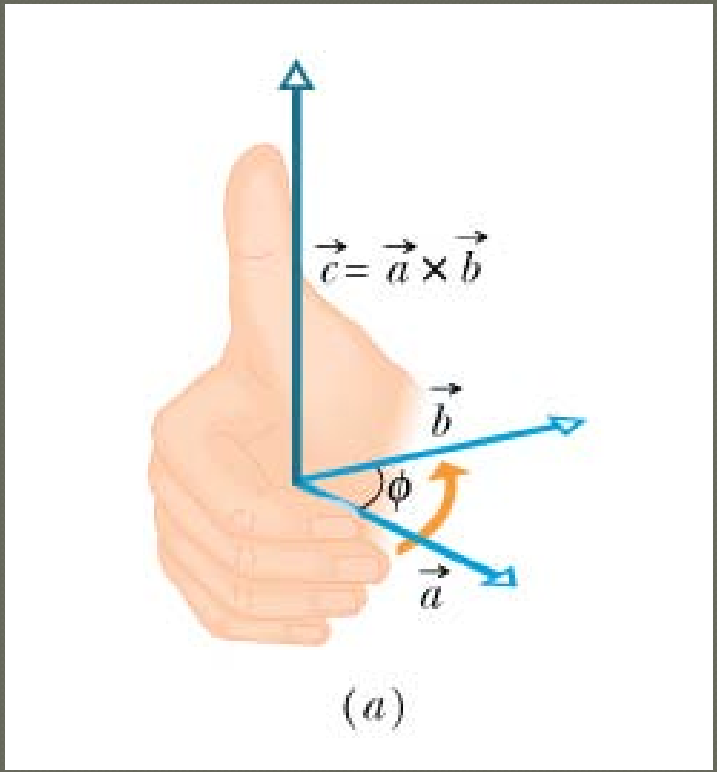


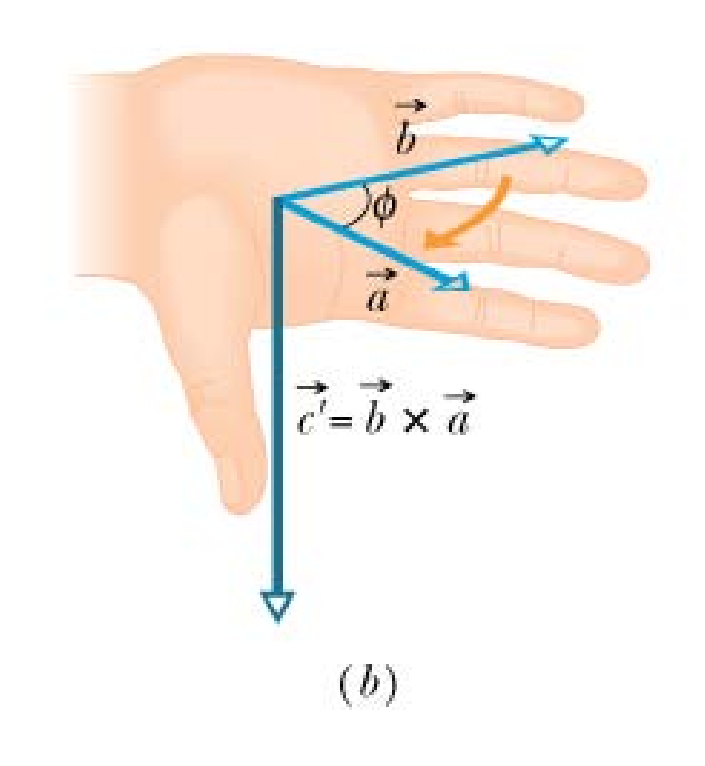
Aceleração angular negativa



Produto vetorial

Revisão



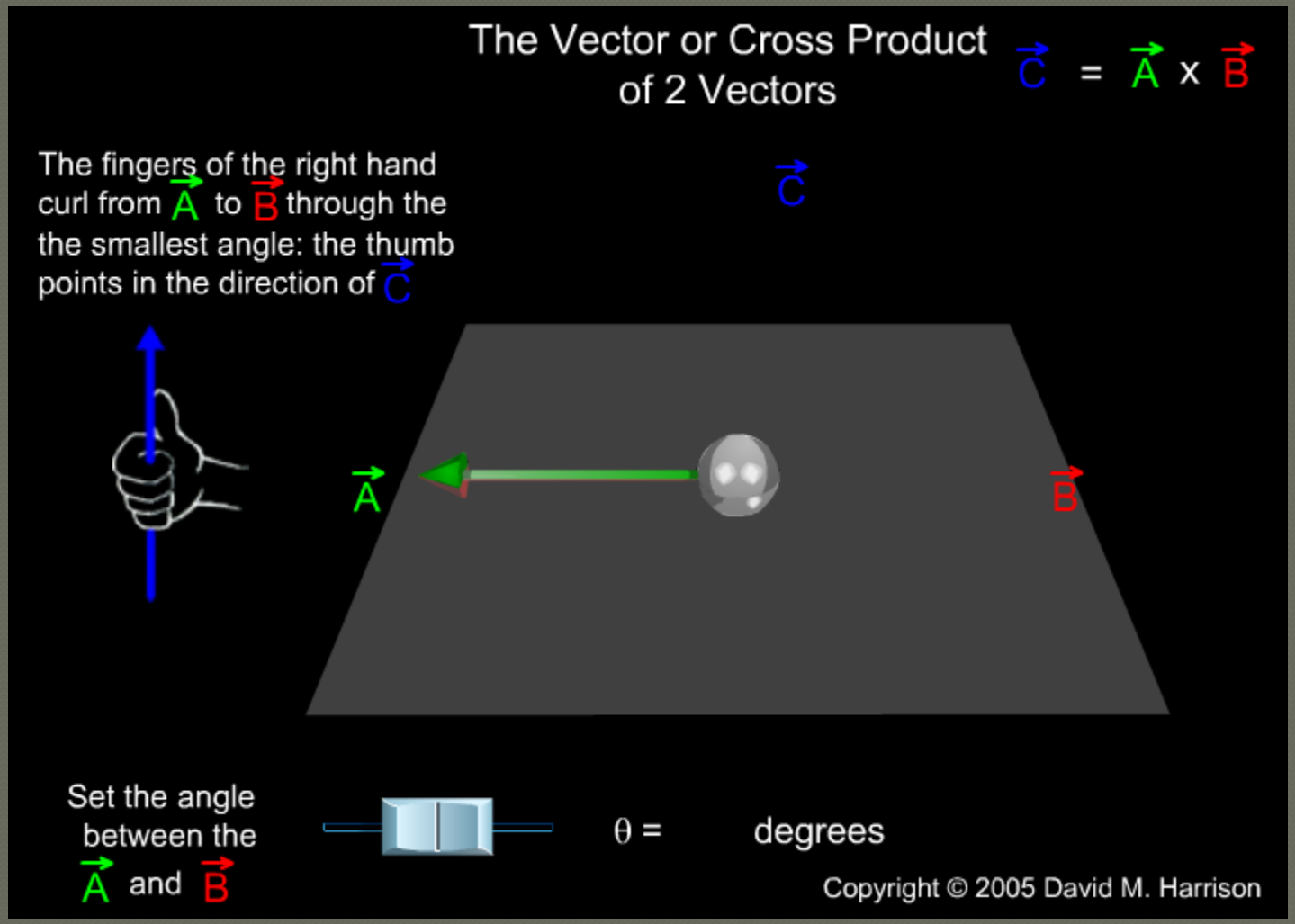


$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \operatorname{sen} \phi$$

©2002 by John Wiley & Sons

Produto vetorial

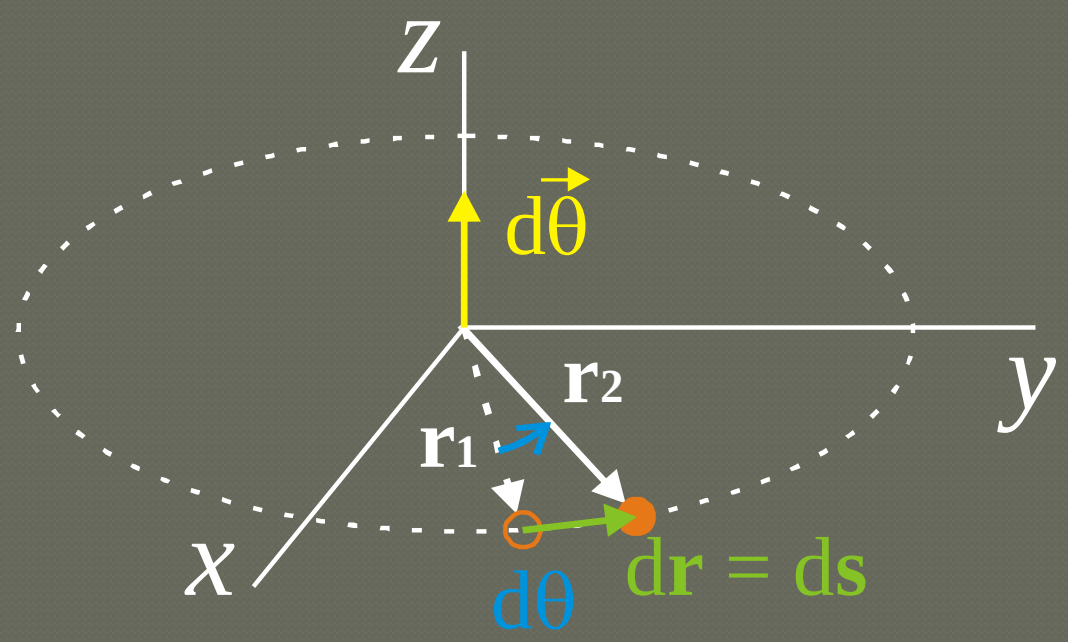
Revisão



http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/Vectors/CrossProduct/CrossProduct.html

Grandezas rotacionais como vetores

Relações entre grandezas lineares e angulares



Relação escalar

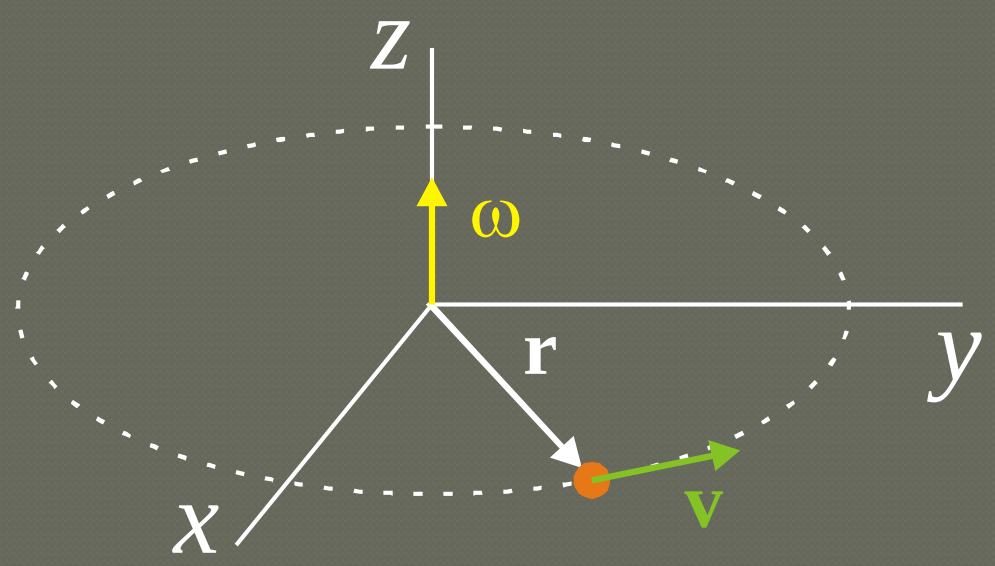
$$ds = dr = rd\theta$$

Relação vetorial

$$d\mathbf{s}\boldsymbol{\theta} = d\mathbf{r} \times$$

Grandezas rotacionais como vetores

Relações entre grandezas lineares e angulares



Velocidade linear

$$d\mathbf{s} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$$

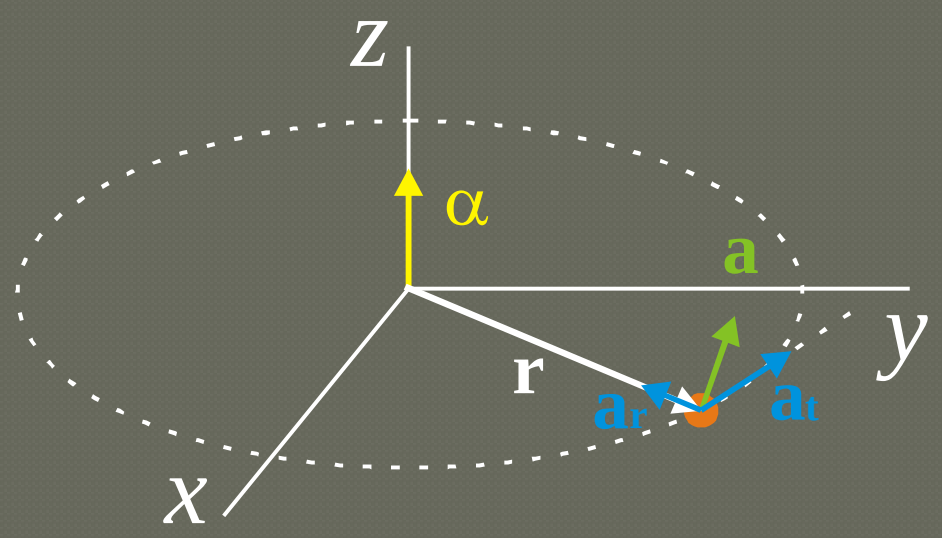
$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}\right)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}$$

Grandezas rotacionais como vetores

Relações entre grandezas lineares e angulares



Aceleração linear

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

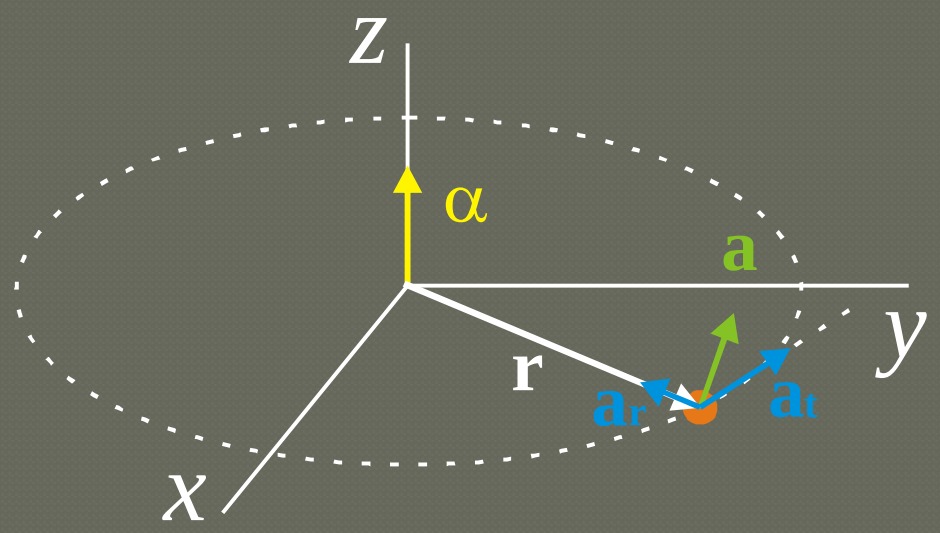
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$$

$$\boxed{\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r$$

Grandezas rotacionais como vetores

Relações entre grandezas lineares e angulares



Aceleração linear ($\mathbf{a}$):

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r$$

Aceleração tangencial ($\mathbf{a}_t$):

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

Aceleração radial ($\mathbf{a}_r$):

$$\mathbf{a}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Energia no movimento de rotação

Energia cinética rotacional de um sistema de partículas

Energia cinética rotacional da i-ésima partícula.

$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \left(r_i \omega \right)^2 = \frac{1}{2} m r_i^2 \omega^2$$

Energia cinética rotacional de um sistema formado por N partículas.

$$K = \frac{1}{2} m r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m r_2^2 \omega^2 + \cdots = \sum \frac{1}{2} m r_1^2 \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} m \left(r_1^2 + r_2^2 + \cdots \right) \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum m r_1^2 \right) \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

I $\rightarrow$ Momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação.

Energia no movimento de rotação

Momento de inércia ou inércia rotacional

Momento de inércia de um sistema formado por N partículas:

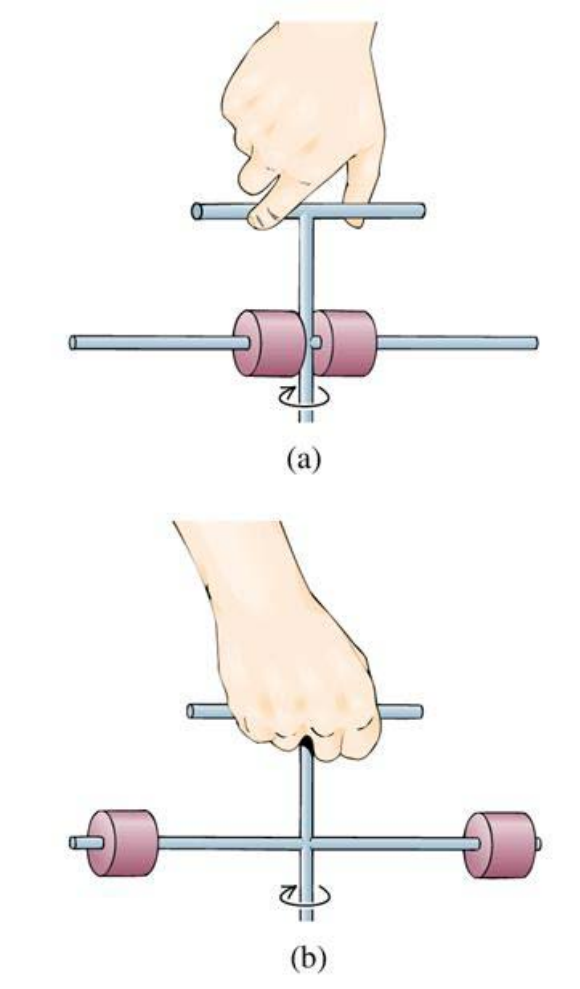
$$I = mr_1^2 + mr_2^2 + \cdots = \sum mr_i^2$$

Momento de inércia de um corpo rígido:

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum r^2 \Delta m = \int r^2 dm$$

Energia no movimento de rotação

Momento de inércia ou inércia rotacional



Um dispositivo que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. Os dois cilindros de massa *m* podem ser bloqueados em qualquer posição ao longo do eixo horizontal.

(a) Quando os dois cilindros estão localizados próximos ao eixo de rotação, o momento de inércia é pequeno e é fácil fazer o dispositivo girar.

(b) Quando os dois cilindros estão localizados longe do eixo de rotação, o momento de inércia é grande, sendo mais difícil fazer o dispositivo girar ou parar.

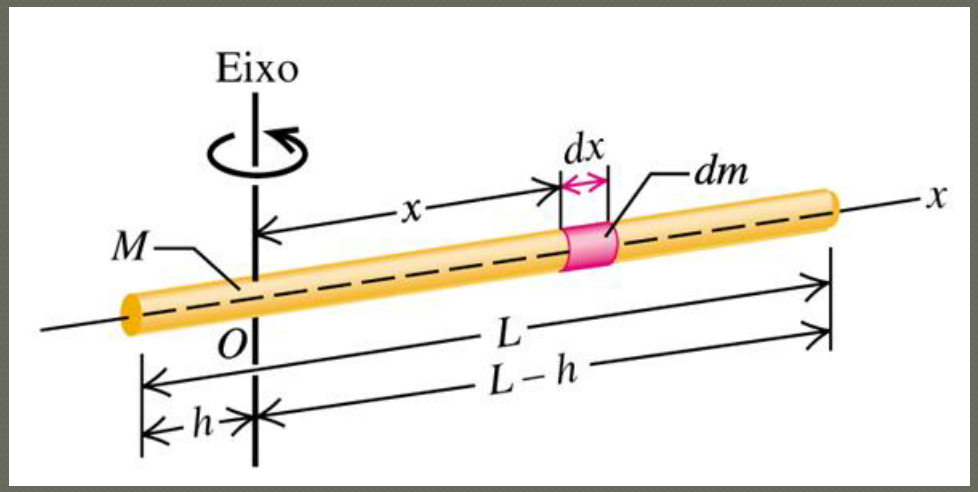
©2004 by Pearson Education

Energia no movimento de rotação

Cálculo do momento de inércia de corpos rígidos

$$I = \int r^2 dm$$

Momento de inércia de uma vareta fina, de massa *M* e comprimento *L*, em relação ao eixo *O*:



Densidade linear da vareta:

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dm}{dx}$$

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

Cálculo do momento de inércia:

$$I = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-h}^{L-h} x^2 dx$$

$$I = \left[\frac{M}{L} \left(\frac{x^3}{3} \right) \right]_{-h}^{L-h}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3} M \left(L^2 - 3Lh + 3h^2 \right)}$$

©2004 by Pearson Education

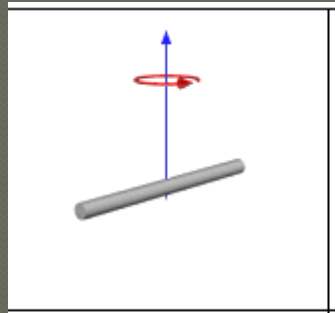
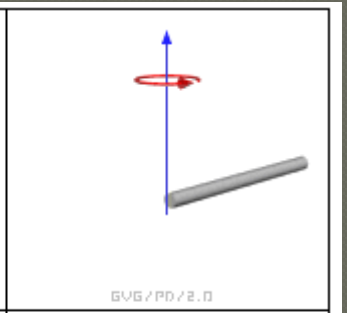
Energia no movimento de rotação

Cálculo do momento de inércia de corpos rígidos

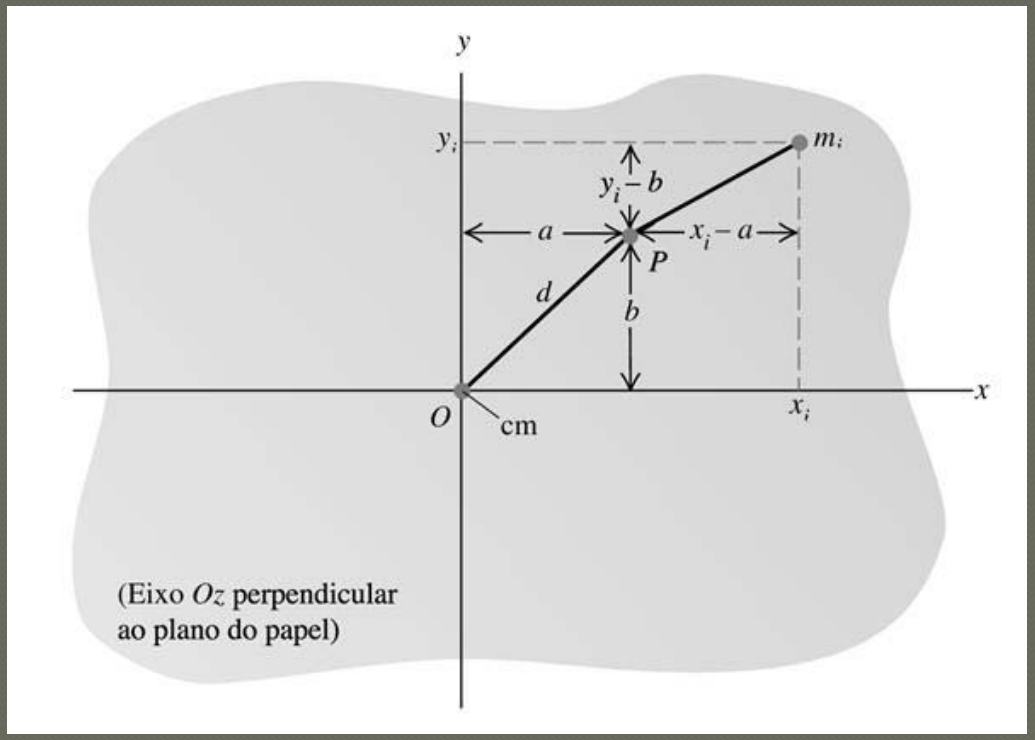
$$\boxed{I = \frac{1}{3} M \left(L^2 - 3Lh + 3h^2 \right)}$$

Eixo no centro de massa da vareta (h = L/2): $I = \frac{1}{12} ML^2$

Eixo na extremidade da vareta (h = 0): $I = \frac{1}{3} ML^2$

	
slender rod of length L and mass M, spinning around center:	slender rod of length L and mass M, spinning around end:
(M * L ^ 2) / 12	(M * L ^ 2) / 3

Teorema dos eixos paralelos



O elemento de massa *mi* possui coordenadas (*xi*, *yi*) em relação ao eixo que passa no centro de massa perpendicularmente ao plano da figura. O elemento de massa possui coordenadas (*xi* – *a*, *yi* – *b*) em relação ao eixo paralelo que passa no ponto *P*.

$$I_{CM} = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$$

$$I_P = \sum m_i \left[\left(x_i - a \right)^2 + \left(y_i - b \right)^2 \right]$$

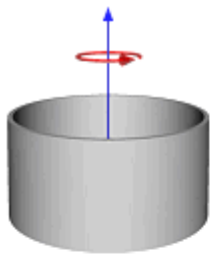
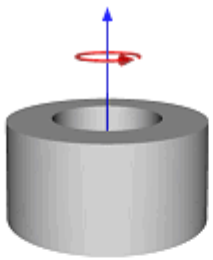
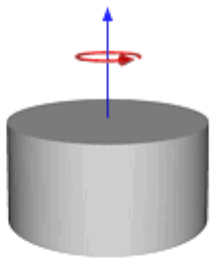
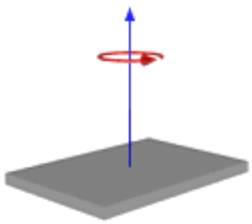
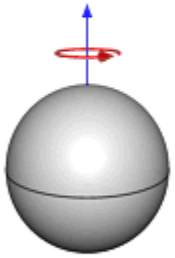
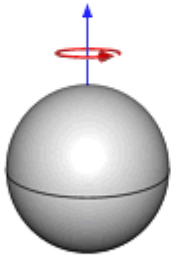
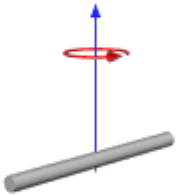
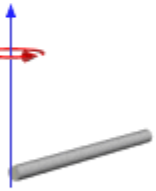
$$I_P = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) - 2a \sum m_i x_i - 2b \sum m_i y_i + \left(a^2 + b^2 \right) \sum m_i$$

$$\boxed{I_P = I_{CM} + Md^2}$$

©2004 by Pearson Education

Energia no movimento de rotação

Momento de inércia ou inércia rotacional

			
thin hoop or ring of radius R & mass M:	thick ring of inner radius R1, outer radius R2, and mass M:	solid cylinder or disc of radius R and mass M:	flat plate with sides of length A and B and mass M:
M * R^2	**M * (R1^2 + R2^2) / 2**	**(M * R^2) / 2**	**M * (A^2 + B^2) / 12**
			
solid sphere of radius R and mass M:	thin-walled hollow sphere of radius R & mass M:	slender rod of length L and mass M, spinning around center:	slender rod of length L and mass M, spinning around end:
(2 / 5) * M * R^2	**(2 / 3) * M * R^2**	**(M * L ^ 2) / 12**	**(M * L ^ 2) / 3**

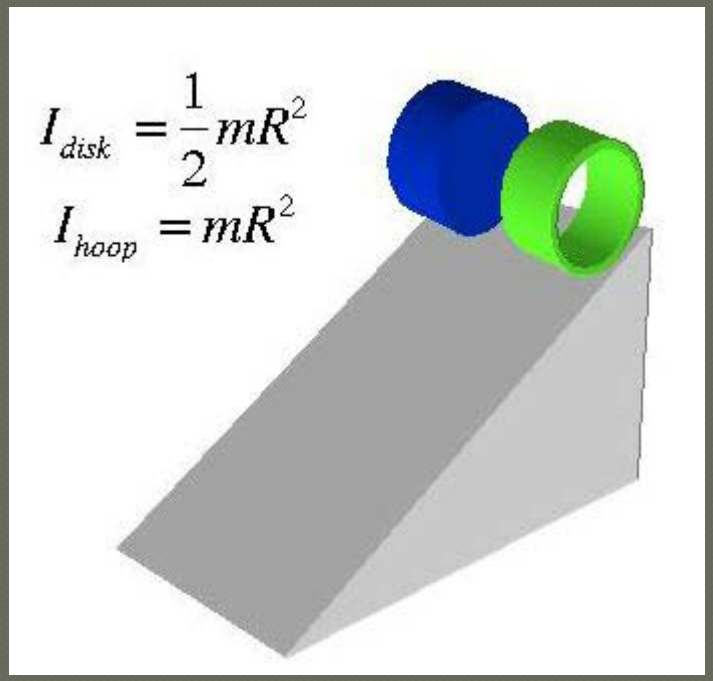
MOMENTS OF INERTIA

Momento de inércia de alguns corpos simples.

Energia no movimento de rotação

Momento de inércia ou inércia rotacional

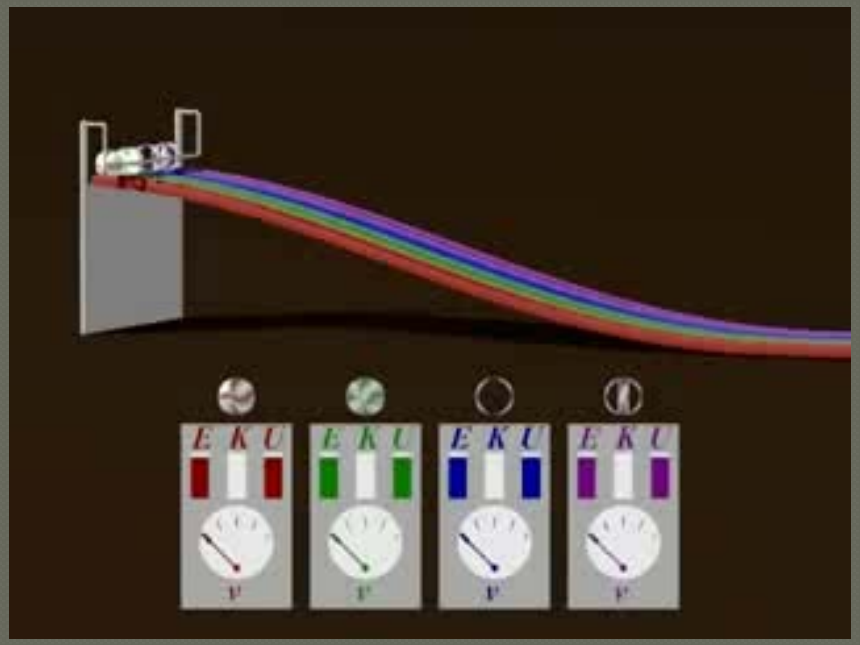
Qual corpo chegará primeiro à base da rampa rolando sem deslizar?



Energia no movimento de rotação

Momento de inércia ou inércia rotacional

Qual corpo chegará primeiro à base da rampa rolando sem deslizar?



http://www.youtube.com/watch?v=7mxV6f5nuJY

Energia no movimento de rotação

Energia potencial gravitacional de um sistema de partículas

Energia potencia da i-ésima partícula.

$$U_i = m_i g y_i = \left(m_i y_i\right) g$$

Energia cinética rotacional de um sistema formado por N partículas.

$$U = \left(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots\right) g = \left(M y_{CM}\right) g$$

$$U = M g y_{CM}$$

Energia no movimento de rotação

Energia potencial gravitacional de um sistema de partículas

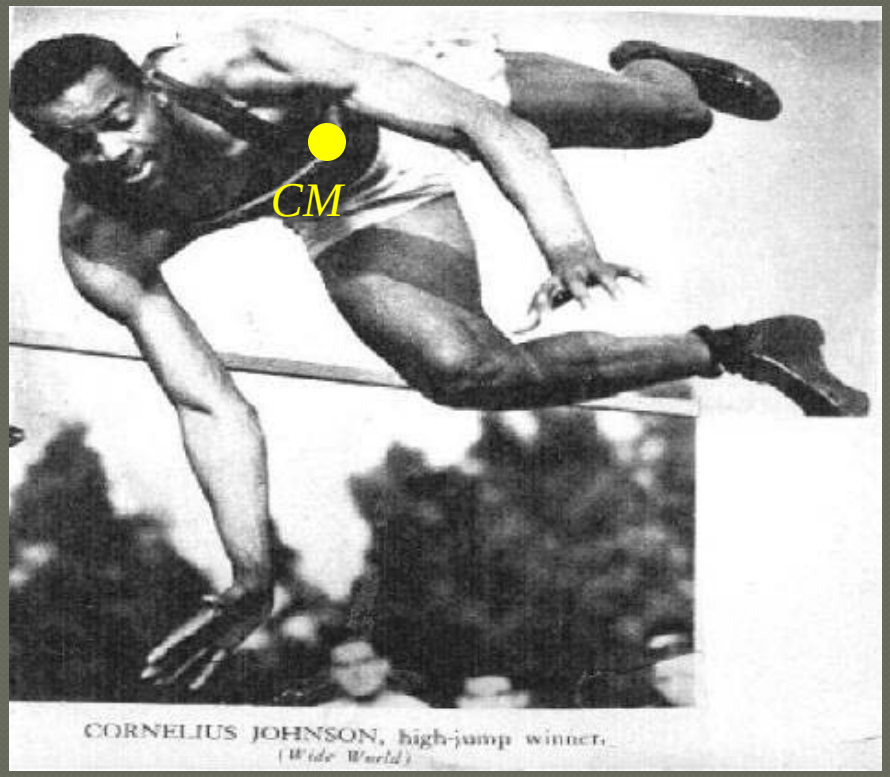
Em uma técnica denominada "inversão de Fosbury", em homenagem ao seu criador, este atleta encurva seu corpo quando passa sobre a barra no salto em altura. Em conseqüência, seu centro de massa passa efetivamente *embaixo* da barra. Essa técnica necessita de um menor aumento de energia potencial gravitacional do que a técnica antiga, na qual o centro de massa passava por cima da barra.

$$U = Mgy_{CM}$$

©2004 by Pearson Education

Energia no movimento de rotação

Energia potencial gravitacional de um sistema de partículas



Cornelius Johnson, campeão olímpico do salto em altura (Berlim, 1936).

$$U = Mgy_{CM}$$